سلسلة أكسفورد لمبادئ الكيمياء

أساسيات في العلوم الرياضية

مسائل محلولة

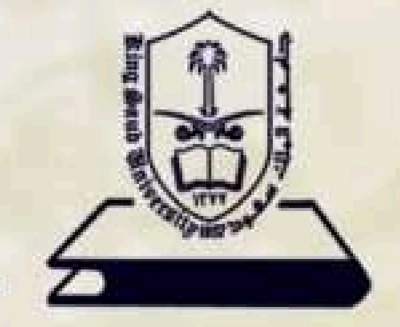
تأليف

د. س. سيفيا   س . غ. رولينغ

ترجمة

د. معروف عبدالرحمن سمحان

(منشورات أكسفورد العلمية)



جامعة الملك سعود
النشر العلمي و المطابع


الله
بسم الله الرحمن الرحيم


mohamed khatab

سلسلة أكسفورد لمبادئ الكيمياء

أساسيات في العلوم الرياضية
مسائل محلولة

تأليـــف

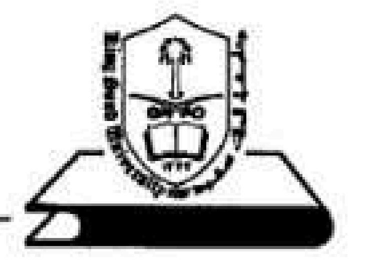
د. س. سيفيا
معامل رذرفورد ابيلتون وكلية سانت جورج
أكسفورد

س. غ. رولينغ
قسم الفيزياء الفلكية وكلية سانت بيتر
أكسفورد

ترجمة

د. معروف عبدالرحمن سمحان
قسم الرياضيات – كلية العلوم
جامعة الملك سعود

(منشورات أكسفورد العلمية)



النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود
ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

(ح) **جامعة الملك سعود، ١٤٣٢هـ (٢٠١١م).**

هذه الترجمة العربية مصرح بها من مركز الترجمة بالجامعة لكتاب:

Published in the United States.
By: D.S.Sivia and S.G.Rawlings, 1999.
© Oxford University Press, Inc, New. York.

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

سيفا، د. س

أساسيات في العلوم الرياضية مسائل محلولة. /د.س. سيفا؛ س.غ. رولينغ؛

معروف عبدالرحمن سمحان. - الرياض، ١٤٣٢هـ.

٢١٨ ص، ١٧ × ٢٤سم

ردمك: ٦ - ٨٨٠ - ٥٥ - ٩٧٨-٩٩٦٠

١- الرياضيات أ. رولينغ، س.غ (مؤلف مشارك) ب. سمحان،

معروف عبدالرحمن (مترجم) ج. العنوان د. السلسلة

ديوي ٥١٠ ١٤٣٢/٨٥٠٥

رقم الإيداع ١٤٣٢/٨٥٠٥

ردمك: ٦ - ٨٨٠ - ٥٥ - ٩٧٨-٩٩٦٠

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة، شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس على نشره - بعد اطلاعه على تقارير المحكمين - في اجتماعه الخامس عشر للعام الدراسي ١٤٣٢/١٤٣١هـ المعقود في تاريخ ١٤٣٢/٥/١٣هـ الموافق ١٧ /٤/ ٢٠١١م.

يعتذر النشر العلمي عن عدم وضوح الأشكال لهذا الكتاب لورودها من المترجم



النشر العلمي والمطابع ١٤٣٢هـ

مقدمـــة

تحتوي مكتبتنا العربية على عدد قليل من الكتب العلمية المترجمة من لغات أُخرى مقارنة مع معظم مكتبات الدول الأجنبية. ومع ازدياد الكتب العلمية المطبوعة عالمياً تزداد حاجتنا للترجمة حيث إن الترجمة هي أحد الروافد الرئيسة في إثراء المكتبة العربية.

إن للترجمة العديد من المكاسب فهي من ناحية تتيح للقارئ العربي الاطلاع على ماتوصل إليه العلم من اكتشافات وتقنيات ، ومن ناحية أخرى فهي تسهل على طالب العلم تتبع المادة العلمية خاصة إذا كانت مكتوبة بلغته الأم.

قمت أثناء الترجمة لهذا الكتاب بتصحيح الأخطاء المطبعية التي استطعت اكتشافها في النسخة الإنجليزية ، كما قمت في بعض الأحيان بإعادة صياغة خطوات حل بعض المسائل ليسهل على القارئ فهمها دون الإخلال بالنص الأصلي.

بالنسبة للمصطلحات العلمية المستخدمة في هذا الكتاب فقد اعتمدت في ترجمتها على معجم العلوم الرياضية الصادر عن قسم النشر العلمي والمطابع في جامعة الملك سعود.

وفي الختام أرجو أن أكون قد وفقت في ترجمة هذا الكتاب بشكل يجعل من هذا العمل فائدة للكيميائيين وغيرهم من المهتمين بالعلوم الرياضية والله من وراء القصد.

المترجم



مقدمة محرر السلسلة

SERIES EDITOR'S FOREWORD

الهدف الرئيس وراء كتابة أكسفورد لسلسلة المبادئ الأولية في الكيمياء هو تقديم مادة واضحة ومختصرة للعديد من المفاهيم التي يحتاجها الطالب في قسم الكيمياء من سنته الجامعية الأولى إلى سنة تخرجه. تحتوي سلسلة الكيمياء الفيزيائية على كتب تحتوي على المادة الأساسية التي يحتاجها جميع الكيميائيين إضافة إلى كتب تعكس الاتجاهات الجديدة للأبحاث في الموضوع ، ومن ثم فهي تساهم (وربما تشجع) على تطوير مقررات الدراسة الجامعية.

يقدم لنا ديفندر سيفيا وستيف رولينغ أحد كتب المبادئ الأولية في الكيمياء الفيزيائية ألا وهو " أساسيات في العلوم الرياضية ".

يتناول هذا الكتاب و بأسلوب سلس تقديم المفاهيم الأساسية والتطبيقات لموضوع يُفترض معرفته من قبل جميع المهتمين بالعلوم. هذا الكتاب مهم لطلاب العلوم جميعاً على اختلاف تخصصاتهم.

ريتشارد كومبتن

مكتبة الكيمياء النظرية والفيزيائية

جامعة أكسفورد



تمهيد
PREFACE

تلعب الرياضيات دوراً أساسياً في حياة جميع المتنسبين لكلية العلوم والمهندسين ويمتد هذا الدور من الأيام الدراسية الأولى إلى الجامعة ومن ثم إلى الحياة العملية. ومهما اختلفت الأذواق الشخصية في تناول هذا الموضوع إلا أنه لابد من تعلمه بدرجة معينة من العمق في المرحلة الجامعية. هذا الكتاب " مسائل محلولة" هو جزء من مجلدين يلخصان المفاهيم الأساسية والنتائج التي تُدرس في المرحلة الثانوية ومن ثم يقومان بتوسيع هذه المفاهيم والأفكار ليغطيان المادة العلمية التي يحتاجها معظم طلبة مرحلة البكالوريوس. يُفترض أن يكون القارئ على معرفة بالمفاهيم النظرية للموضوع المقدمة في كتاب المبادئ الأولية للعلوم الرياضية رقم ٧٧ من السلسلة، ولذا فهو يهدف إلى المساعدة العملية للقارئ بتقديم حلول نموذجية وملاحظات إضافية لمجال واسع من التمارين.

نود تقديم الشكر للعديد من الأصدقاء وزملاء العمل الذين أبدوا اهتماماً خاصاً في هذا المشروع وساعدوا في تسريع إتمامه وهم: جيري مايرز، وجيف بنفولد، وأندرو تايلور. أما البروفسور ريتشارد كومبتن فقد غمرنا بتوجيهاته وتشجيعه خلال جميع مراحل المشروع فله الشكر العميق.

د.س.س – س.غ.ر

أكسفورد – يناير ١٩٩٩م



المحتويات

الصفحة

مقدمة المترجم .... هـ

مقدمة محرر السلسلة .... ز

تمهيد .... ط

الفصل الأول: أساسيات الجبر والحساب ١

الفصل الثاني: المنحنيات والرسوم ١٣

الفصل الثالث: حساب المثلثات ٢٣

الفصل الرابع: التفاضل ٣١

الفصل الخامس: التكامل ٤٧

الفصل السادس: متسلسلة تايلور ٥٩

الفصل السابع: الأعداد المركبة ٦٧

الفصل الثامن: المتجهات ٧٩

الفصل التاسع: المصفوفات ٩٥

الفصل العاشر: الاشتقاق الجزئي ١٠٧
الفصل الحادي عشر: التكاملات الخطية ١٢٣
الفصل الثاني عشر: التكاملات المتعددة ١٢٩
الفصل الثالث عشر: المعادلات التفاضلية العادية ١٣٩
الفصل الرابع عشر: المعادلات التفاضلية الجزئية ١٥٩
الفصل الخامس عشر: متسلسلة وتحويلات فورييه ١٧١

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي- إنجليزي ١٨٥
ثانياً: إنجليزي- عربي ٢٠٠
كشاف الموضوعات ٢١٥

الفصل الأول

أساسيات الجبر والحساب
BASIC ALGEBRA AND ARITHMETIC

(١,١) احسب قيمة كل من :

أ) $4^{3/2}$ ب) $27^{-2/3}$

ج) $3^2 3^{-3/2}$ د) $log_2(8)$

هـ) $log_2(8^3)$

الحل :

أ)
$$4^{3/2} = 4^{1/2\times 3} = \left(4^{1/2}\right)^3 = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$$
أو
$$4^{1+1/2} = 4^1 4^{1/2} = 4\sqrt{4} = 4\times 2 = 8$$

ب)
$$27^{-2/3} = \frac{1}{27^{2/3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

ج)
$$3^2 3^{-3/2} = 3^{2-3/2} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

د)
$$log_2(8) = log_2(2^3) = 3$$

هـ)
$$log_2(8^3) = 3\, log_2(8) = 3\times 3 = 9$$

أو

$$log_2(8^3) = \log_2[(2^3)^3] = log_2(2^9) = 9$$

(١,٢) بوضع $A = a^M$ و $B = a^N$ واستخدام تعريف اللوغاريتم أثبت أن :

$log(AB) = log(A) + log(B)$ و $log(A/B) = log(A) - log(B)$

وبالمثل أثبت أن :

$log_b(A) = log_a(A) \times log_b(a)$ و $log(A^\beta) = \beta\, log(A)$

الحل :

$$A = a^M \Leftrightarrow M = log_a(A) \text{ و } B = a^N \Leftrightarrow N = log_a(B)$$

ولكن $AB = a^M a^N = a^{M+N}$.

إذن $log_a(AB) = l_a(a^{M+N}) = M + N = log_a(A) + log_a(B)$.

وبهذا يكون $log(AB) = log(A) + log(B)$.

تبقى هذه النتيجة صحيحة للوغاريتمات لأي أساس لأننا لم نحدد قيمة معينة للأساس .

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{a^N} = a^{-N}$$

إذن، $log_a\left(\frac{1}{B}\right) = lo_a(a^{-N}) = -N = -\,lo_a(B)$.

ومن ثم بتطبيق النتيجة السابقة على لوغاريتم حاصل ضرب مع $\frac{1}{B}$ نحصل على :

$$log(A/B) = log(A) - log(B)$$

$$A^{\beta} = (a^M)^{\beta} = a^{M\beta}$$

إذن، $log_a(A^{\beta}) = log_a(a^{M\beta}) = M\beta = log_a(A)$. وبهذا يكون:

$$log(A^{\beta}) = \beta\, log(A)$$

$$log_b(A) = log_b(a^M) = M\, log_b(a)$$

إذن، $log_b(A) = log_a(A) \times log_b(a)$.

(١,٣) جد صيغة لحلي معادلة الدرجة الثانية $x^2 + bx + c = 0$

الحل :

إذا كان $a \neq 0$ فإن:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

الصيغة السابقة صحيحة عندما $a \neq 0$. أما إذا كان $a = 0$ فإننا نحصل على المعادلة الخطية $bx + c = 0$ ومن ثم على الحل $x = -c/b$.

(١,٤) حل المعادلات التالية :

أ) $x^2 - 5x + 6 = 0$

ب) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

ج) $x^2 - 4x + 2 = 0$

الحل :

أ) $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2\ ,\ x = 3$

ب) $3x^2 + 5x - 2 = (3x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1/3,\quad x = -2$

إذا كان التحليل صعباً فمن الممكن حل المعادلة دائماً باستخدام الصيغة العامة المقدمة في التمرين (١,٣).

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow x = -\frac{12}{6}, \frac{2}{6}$$

ج)
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{8}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

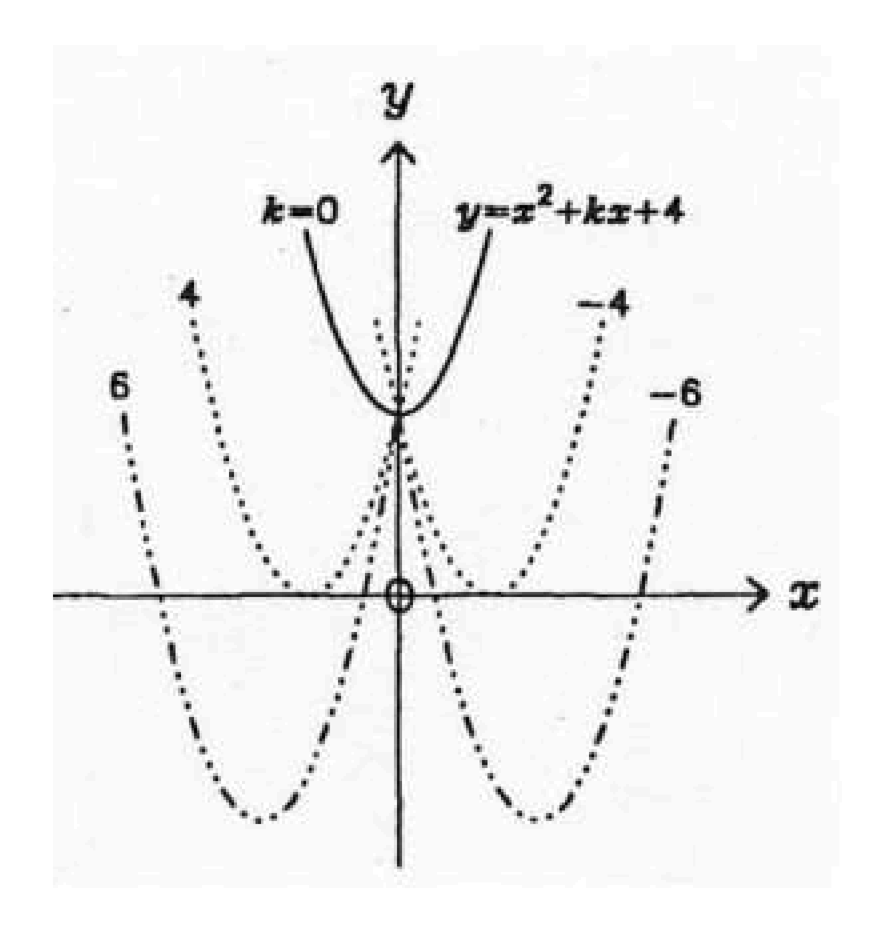
(١,٥) ما هي قيم التي تجعل جذور المعادلة $x^2 + kx + 4 = 0$ حقيقية؟

الحل :

الشرط اللازم للحصول على جذور حقيقية هو $b^2 \geq 4ac$. وبهذا يكون $k^2 \geq 16$.

أي أن $|k| \geq 4$. وهذا يعني أن $c \leq -4$ أو $k \geq 4$.





(١,٦) حل المعادلات التالية آنياً :

أ) $3x + 2y = 4$ ، $x - 7y = 9$

ب) $x^2 + y^2 = 2$ ، $x - 2y = 1$

ج) $3x + 2y + 5z = 0$ ، $x + 4y - 2z = 9$ ، $4x - 6y + 3z = 3$

الحل :

أ)

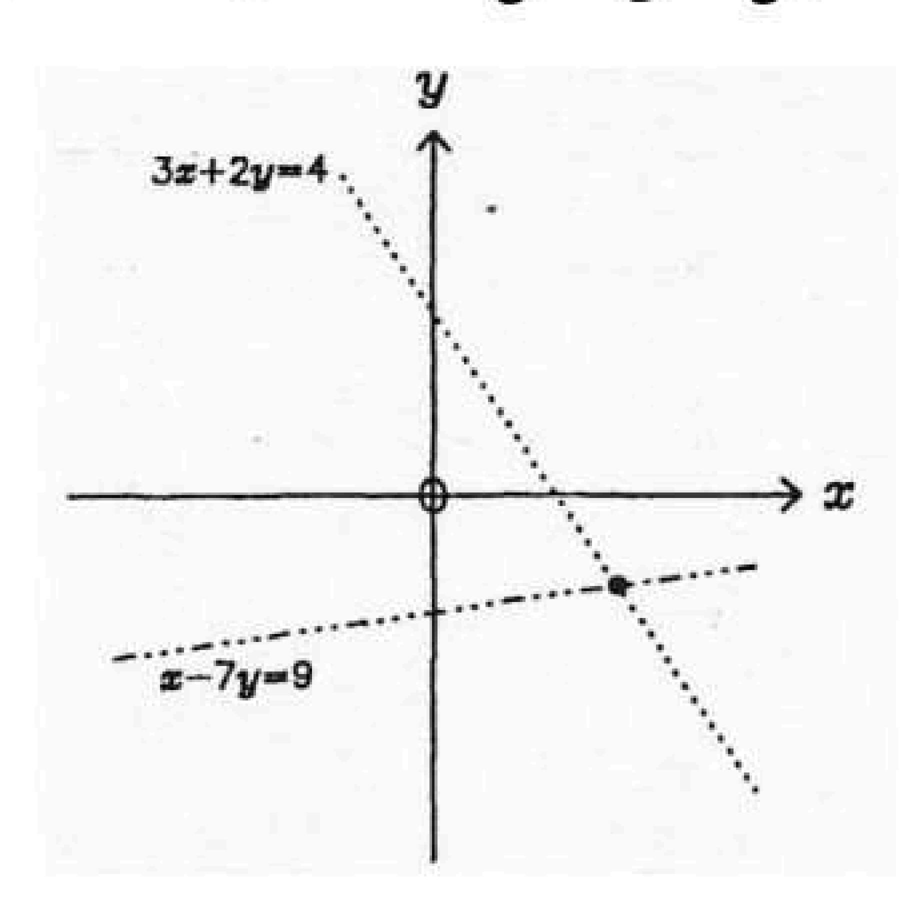
$$3x + 2y = 4 \qquad (١)$$

$$x - 7y = 9 \qquad (٢)$$

بضرب (٢) بالعدد 3− وجمعها مع المعادلة (١) نجد أن :

$$3x + 2y - (3x - 21y) = 4 - 27$$

ومنه فإن $23y = -23$ وبهذا يكون $y = -1$. بالتعويض في المعادلة (٢) نجد أن $x + 7 = 9$ وبهذا نحصل على الحل $x = 2$ و $y = -1$.



ب)

$$x^2 + y^2 = 2 \qquad (٣)$$

$$x - 2y = 1 \qquad (٤)$$

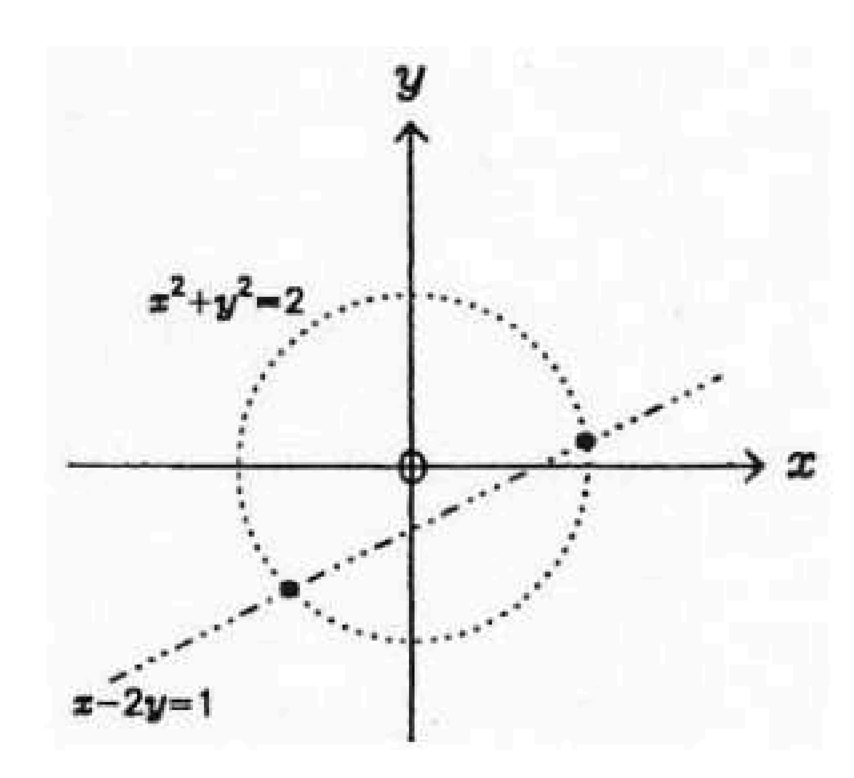
بتعويض $x = 2y + 1$ في المعادلة رقم(٣) نجد أن :

$$(2y+1)^2 + y^2 = 2$$
$$\Rightarrow 4y^2 + 4y + 1 + y^2 = 2$$
$$\Rightarrow 5y^2 + 4y - 1 = 0$$
$$\Rightarrow (5y-1)(y+1) = 0$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{5} \quad \text{أو} \quad y = -1$$

عندما $y = \frac{1}{5}$ نرى أن $x = 1 + 2/5$.

وعندما $y = -1$ نرى أن $x = 1 - 2$.

إذن، ($x = 7/5$ و $y = 1/5$) أو ($x = -1$ و $y = -1$)



ج) $3x + 2y + 5z = 0$ (٥)

$x + 4y - 2z = 9$ (٦)

$4x - 6y + 3z = 3$ (٧)

بضرب المعادلة رقم (٦) بالعدد -3 وجمع الناتج مع المعادلة رقم (٥) نحصل على:

$$-10y + 11z = -27$$

بضرب المعادلة رقم (٦) بالعدد -4 وجمع الناتج مع المعادلة رقم (٧) نحصل على:

$$-22y + 11z = -33$$

وبحل المعادلتين الأخيرتين آنياً نجد أن $y = 1/2$ أو $z = -2$.

إذن $x = 3$ ، $y = 1/2$ و $z = -2$

(١,٧) جد صيغة لمجموع كل من المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية.

الحل :

لنفرض أن :

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (L - 2d) + (L - d) + L = S_N \quad (١)$$

حيث إن $L = a + (N-1)d$. عندئذ :

$$L + (L-d) + (L-2d) + \cdots + (a+2d) + (a+d) + a = S_N \quad (٢)$$

الآن :

$$(١) + (٢) \quad \Rightarrow (a+L) + (a+L) + \cdots + (a+L) + (a+L) = 2S_N$$

أي أن $2S_N = N(a+L) = [2a + (N-1)d]$.

وبهذا يكون المجموع هو $AP = \frac{N}{2}[2a + (N-1)d]$.

افرض أن $a + ar + r^2 + \cdots + ar^{N-2} + ar^{N-1} = S_N$ (٣)

بضرب المعادلة رقم (٣) بالعدد نجد أن :

$$ar + ar^2 + \cdots + ar^{N-2} + ar^{N-1} + ar^N = rS_N \quad (٤)$$

وبطرح المعادلة رقم (٣) من المعادلة رقم (٤) نجد أن $a(\ \ ^N - 1) = S_N(r-1)$

وبهذا يكون المجموع $GP = \frac{a(r^N - 1)}{r-1}$

(١,٨) بكتابة العدد العشري الدوري $0.121212\cdots$ كمجموع متتالية هندسية أثبت أن $0.121212\cdots = \frac{4}{33}$. ما هي القيمة الكسرية للعدد $0.3181818\cdots$ ؟

الحل :

$$0.12121212\cdots = 0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \cdots$$

وهذا مجموع متتالية هندسية حدها الأول $a = 0.12$ ونسبتها $0.01 =$. وبهذا نرى أن :

$$0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \cdots = \frac{0.12}{1-0.01} = \frac{12}{99}$$

ونستنتج أن: $0.12121212\cdots = 4/33$.

$$\begin{aligned} 0.318181818\cdots &= 0.3 + 0.018 + 0.00018 + 0.0000018 + \cdots \\ &= \frac{3}{10} + \frac{0.018}{1-0.01} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{18}{990} \\ &= \frac{33}{110} + \frac{2}{110} \\ &= \frac{35}{110} \end{aligned}$$

ونخلص إلى أن: $0.318181818\cdots = 7/22$.

(١,٩) فرّق الكسور التالية إلى كسور جزئية :

أ) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

ب) $\dfrac{x^2-5x+1}{(x-1)^2(2x-3)}$

ج) $\dfrac{11x+1}{(x-1)(x^2-3x-2)}$

الحل :

أ) $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)}$.

عندئذ ، $A(x-2) + B(x-3) = 1$.

بوضع $x = 2$ نجد أن $B = -1$ وبوضع $x = 3$ نجد أن $A = 1$.

إذن ، $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x-2)}$

وأيضاً ، كان من الممكن الحصول على الإجابة مباشرة باستخدام قاعدة التغطية.

ب) $\frac{x^2-5x+1}{(x-1)^2(2x-3)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(2x-3)}$.

حينئذ، $A(2x-3) + (x-1)[(2x-3) + C(x-1)] = x^2 - 5x + 1$

بوضع $x = 1$ نجد أن $A = 3$ وبوضع $x = \frac{3}{2}$ نجد أن $C = -17$. بمقارنة معاملي x^2 نجد أن $2B + C = 1$. وبهذا يكون $B = 9$. إذن ،

$$\frac{x^2 - 5x + 1}{(x-1)^2(2x-3)} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{9}{(x-1)} - \frac{17}{(2x-3)}$$

في هذه المسألة استخدمنا قاعدة التغطية لإيجاد A و C ولكننا احتجنا إلى مقارنة معاملات لإيجاد .

ج) $\frac{11x+1}{(x-1)(x^2-3x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2-3x-2)}$

إذن ، $A(x^2-3x-2) + (x-1)(Bx+C) = 11x + 1$.

بوضع $x = 1$ نجد أن $A = -3$ وبوضع $x = 0$ نجد أن $-2A - C = 1$.

ومن ذلك نجد أن $C = 5$.

بمقارنة معاملات x^2 نجد أن $A + B = 0$ ونرى أن $B = 3$.

إذن ، $$\frac{11x+1}{(x-1)(x^2-3x-2)} = \frac{3x+5}{(x^2-3x-2)} - \frac{3}{(x-1)}$$

هنا وجدنا فقط من قاعدة التغطية واستخدمنا مقارنة المعاملات لإيجاد B و C.

(١,١٠) احسب كل من المجموعين التاليين :

أ) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

ب) $$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)}$$

الحل :

أ) بملاحظة أن $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$ يكون :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \\ &- \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \cdots \\ &= 1\end{aligned}$$

هذا مثال بسيط على استخدام الكسور الجزئية وسنرى أيضاً كيفية استخدام مفهوم الكسور الجزئية في حل بعض مسائل التكامل.

ب) لاحظ أن :

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)} = e^{-\beta/2} + e^{-3\beta/2} + e^{-5\beta/2} + e^{-7\beta/2} + \cdots$$

وهـذا مجمـوع متتاليـة هندسـية غـير منتهيـة حـدها الأول $a = e^{-\beta/2}$ ونسبتها $r = e^{-\beta}$.

ولذا يكون مجموعها يساوي $\frac{e^{-\beta/2}}{1-e^{-\beta}}$

لهذا المثال البسيط على إيجاد مجموع متتالية هندسية غير منتهية أهمية خاصة في الفيزياء. ففي ميكانيكا الكم ، عند حل معادلة شرودنغر لجزئ في وضع كون توافقي (مثل الجزئ ثنائي الذرة) نجد أن مستويات الطاقة للنظام هي :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) hv$$

حيـث إن $n = 0,1,2,3,\cdots$ و h ثابـت بلانـك و v هـو الـتردد الطبيعـي للذبذبات الذي نحصـل عليهـا مـن تقـوس انبعـاث الكمـون. تُسـمى الحالـة $n = 0$ ، حالة الأساس حيث تكون الطاقة عند نقطة الصفر هي $E_o = \frac{hv}{2}$.احتمـال أن يكـون الجزئي في مستوى طاقة E_n يساوي معامل بولتزمـان $exp(-E_n/kT)$ حيث إن k ثابت بولتزمان و T درجة الحرارة (مقاسة بميزان كـالفن). ومجمـوع هـذه الاحتمـالات هو المجموع سابقاً حيث إن $\beta = \frac{hv}{kT}$ ويُسمى عادة دالة التجزئ.

الفصل الثاني

المنحنيات والرسوم
CURVES AND GRAPHS

(٢,١) جد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(-1,3)$ و $(3,1)$ ثم جد نقطة تقاطعه مع المستقيم $y = x + 1$.

الحل :

المعادلة العامة للمستقيم هي $y = mx + c$.

بالتعويض عن كلٍ من $(-1,3)$ و $(3,1)$ في المعادلة العامة نحصل على المعادلتين

$$-m + c = 3$$
$$3m + c = 1$$

وبحل هاتين المعادلتين آنياً نجد أن $m = -\frac{1}{2}$ و $c = \frac{3}{2}$.

إذن ، معادلة المستقيم هي $2y = 5 - x$.

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم $2y = 5 - x$. مع المستقيم $y = 1 + x$ نقوم بحل المعادلتين آنياً لنجد أن $x = 1$ و $y = 2$ وتكون نقطة التقاطع هي $(1,2)$.

(٢,٢) استخدم طريقة إكمال المربع لإيجاد نقطة انقلاب (انعطاف) المنحنى $y = x^2 + x + 1$ ثم أرسم بيانه.

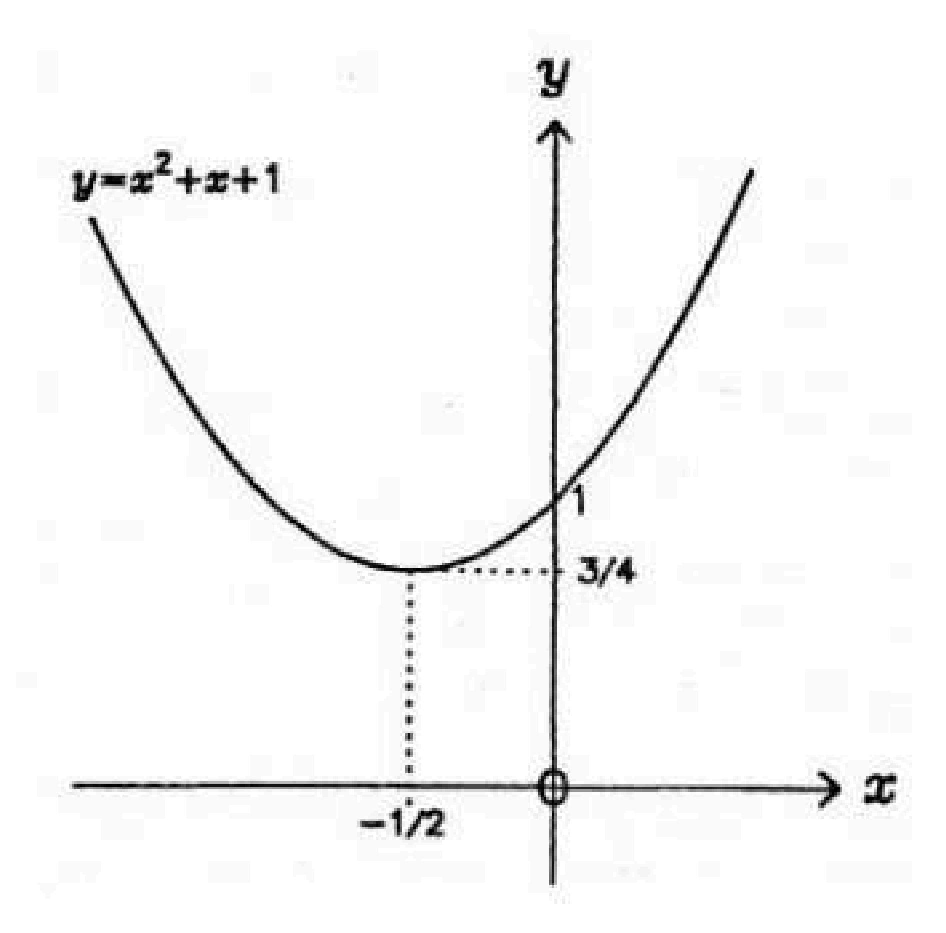
الحل :

بإكمال المربع نجد أن :

$$y = x^2 + x + 1 \quad = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1$$

$$= (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

وعليه ، فإن أصغر قيمة للمتغير y تكون عندما $x = -\frac{1}{2}$ ونجد من ذلك أن نقطة النهاية الصغرى هي $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.



(٢,٣) جـد معادلة القطـع المكافئ المار بالنقاط (0,3)، (3,0)، (5,8) ما هما جذرا المعادلة ؟

الحل :

المعادلة العامة للقطع المكافئ هي :

$$y = ax^2 + bx + c$$

بالتعويض عن النقاط (0,3) ، (3,0) ، (5,8) في المعادلة أعلاه نحصل على نظام المعادلات :

$$c = 3$$
$$9a + 3b + c = 0$$
$$25a + 5b + c = 8$$

وبحل هذا النظام نجد أن $a = 1$ ، $b = -4$ ، $c = 3$.

إذن ، معادلة القطع المكافئ هي $y = x^2 - 4x + 3$.

لإيجاد جذري المعادلة نضع $y = 0$ ونقوم بحل المعادلة التربيعية $x^2 - 4x + 3 = 0$ لنجد أن :

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1) = 0$$

وبهذا نجد أن الجذرين المطلوبين هما $x = 1$ و $x = 3$.

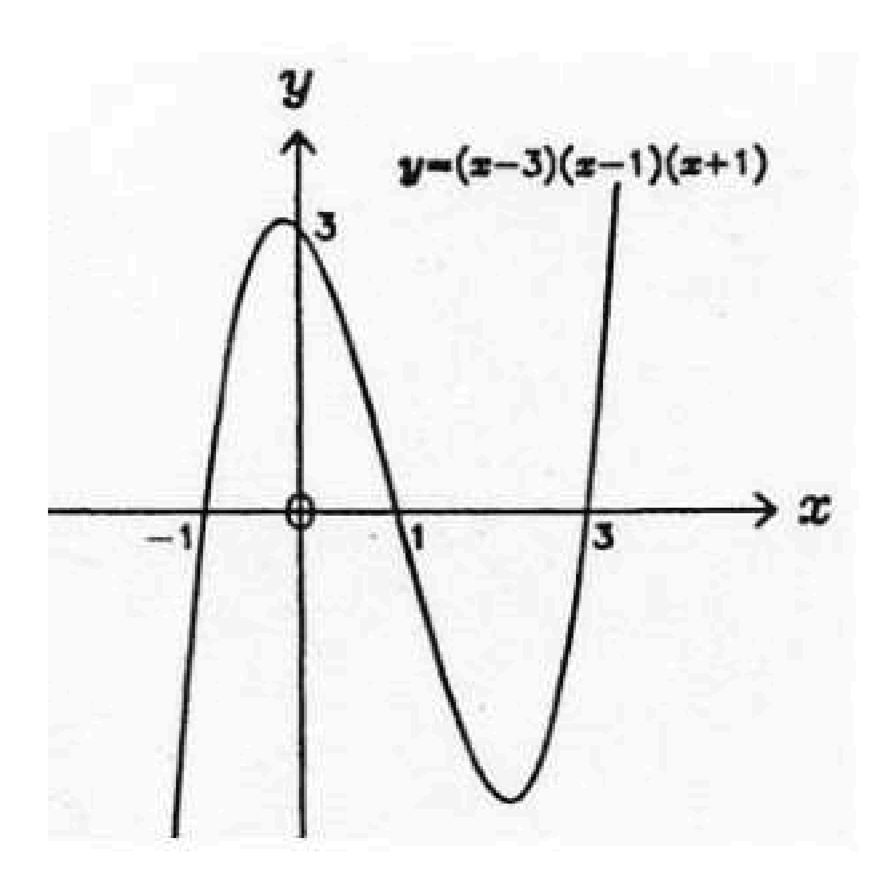
(٢,٤) جد نقاط تقاطع المنحنى $y = (x - 3)(x - 1)(x + 1)$ مع محوري x و y. ارسم منحنى الدالة التكعيبية ثم جد المجال التي تكون فيه الدالة موجبة ؟

الحل :

عندما $y = 0$ نجد أن $x = -1$ ، $x = 1$ ، $x = 3$.

وعندما $x = 0$ نجد أن $y = 3$. إذن، نقاط التقاطع مع محور x هي $(-1,0)$، $(1,0)$، $(3,0)$ ونقطة التقاطع مع محور y هي $(0,3)$.

من بيان الدالة نجد أن $y > 0$ عندما تكون $|x| < 1$ أو $x > 3$.

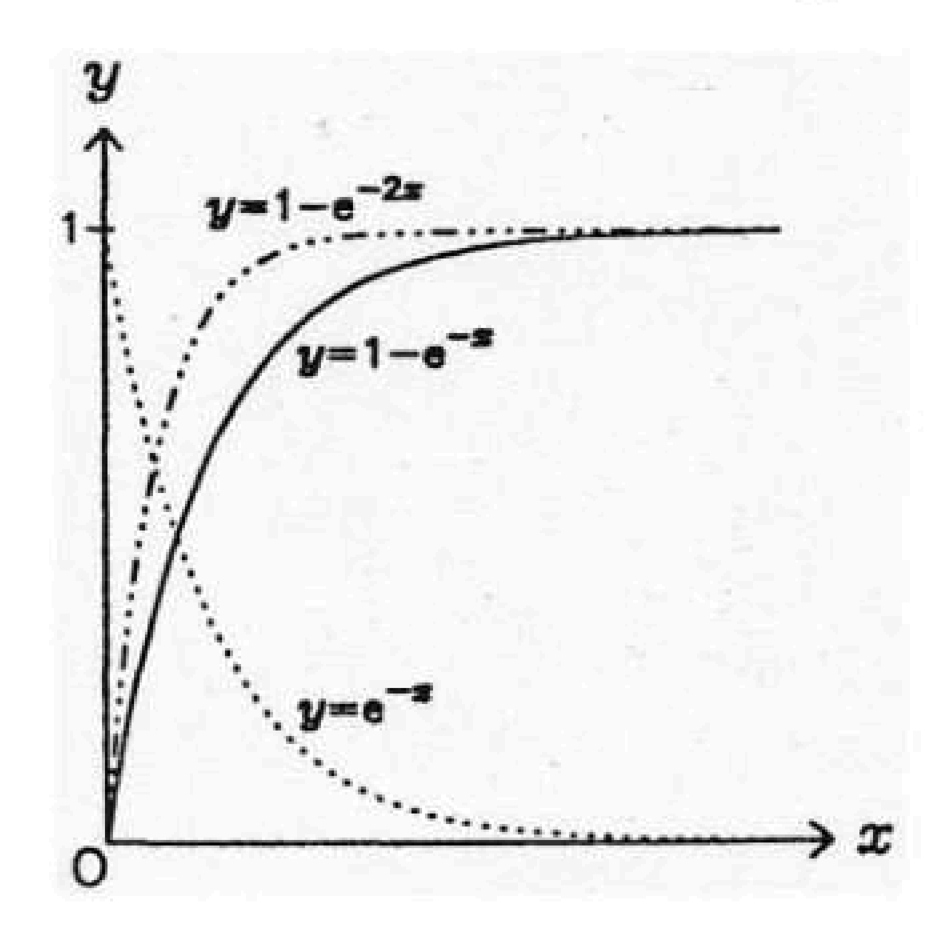


(٢,٥) ارسم بيان كل من الدالتين $y = 1 - e^{-x}$ و $y = 1 - e^{-2x}$ لقيم x الموجبة وارسم أيضاً بيان الدوال $y = e^{-|x|}$ و $y = \frac{1}{x}$ و $y = \frac{1}{x^2-1}$ لجميع قيم x.

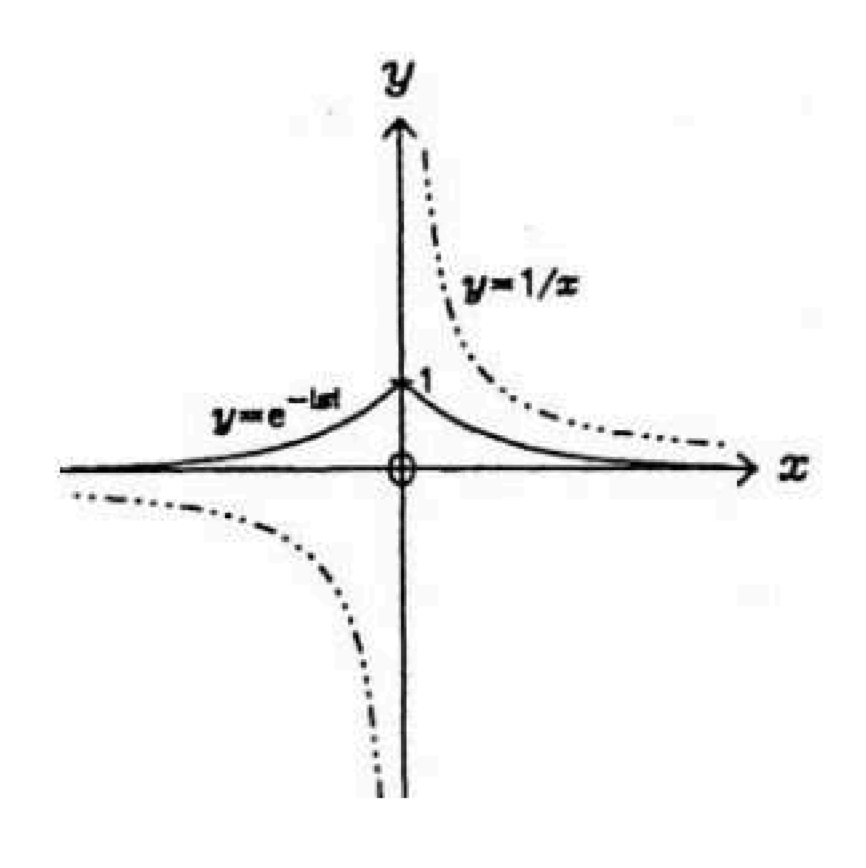
الحل :

بما أن الدالة الأُسية e^{-x} تتناقص من القيمة 1 عندما $x = 0$ إلى القيمة صفر عندما $x \to \infty$ فإن $1 - e^{-x}$ تزداد من نقطة الأصل إلى القيمة التقاربية $y = 1$ عندما تقترب x من اللانهاية. أما الدالة e^{-2x} فهي تتناقص بضعف مُعدل تناقص

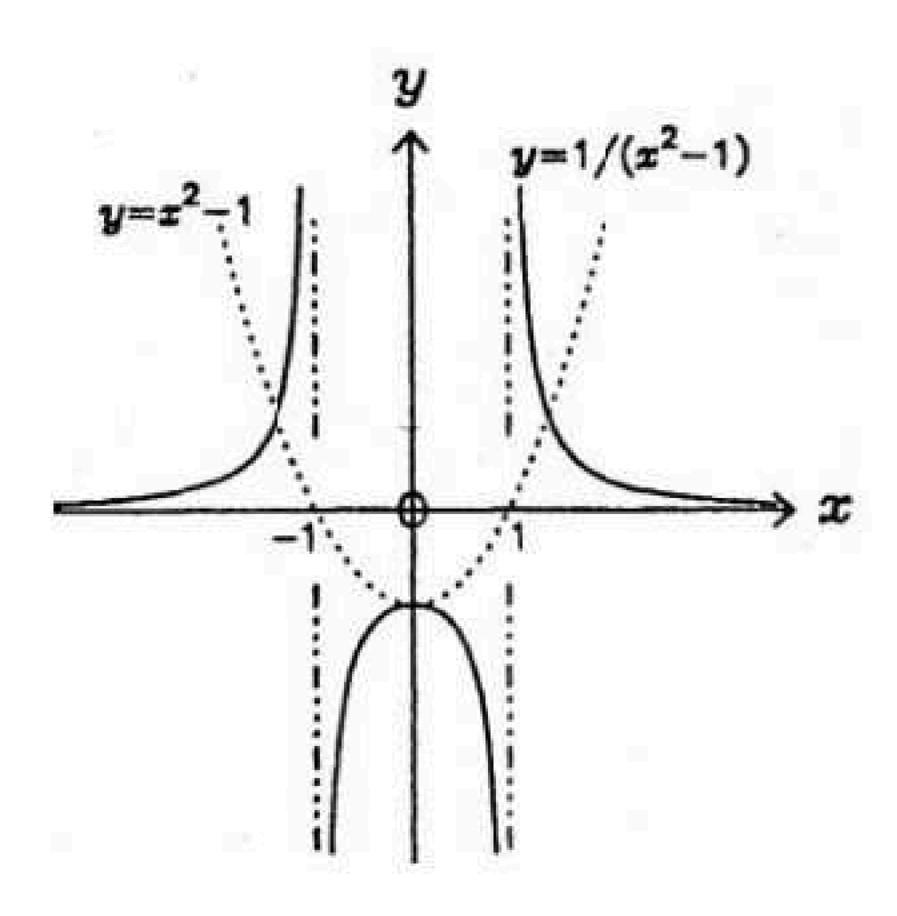
e^{-x} ومن ثم يكون تزايد $1 - e^{-2x}$ أسرع من تزايد $1 - e^{-x}$ إلى القيمة $y = 1$.
بيان كل منهما مبين في الشكل أدناه :



استناداً إلى الفصل الرابع ، كل من $e^{-|x|}$ و $\frac{1}{x}$ غير قابلة للاشتقاق عند نقطة الأصل. ويرجع السبب في ذلك إلى وجود قرنة للدالة الأولى وعدم اتصال الدالة الثانية عند نقطة الأصل. بهذا ، فإن ميل كل منهما غير موجود (غير معرف) عندما $x = 0$.
أيضاً ، $e^{-|x|}$ دالة زوجية ومن ثم بيانها متماثل حول محور y ، والدالة $\frac{1}{x}$ فردية ويكون بيانها متماثل حول نقطة الأصل. بيان كل منهما موضح بالشكل أدناه :



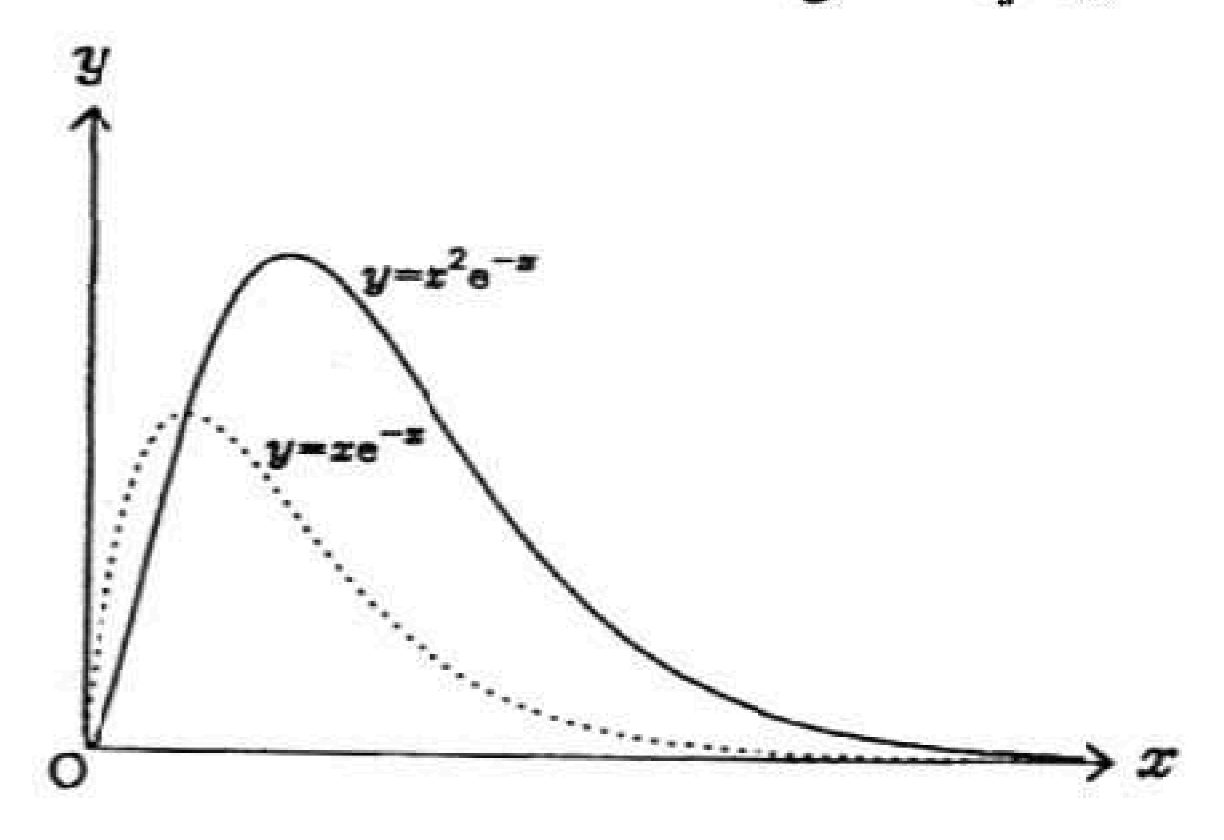
إن أفضل طريقة لرسم بيان دالة معقدة هو تحليلها إلى سلسلة من الخطوات المباشرة. فلرسم بيان الدالة $\frac{1}{x^2-1}$ نرسم أولاً القطع المكافئ $y = x^2 - 1$ ثم نجد مقلوب هذا البيان حيث يتم تحويل القيم الكبرى إلى قيم صغرى والعكس. البيان موضح في الشكل أدناه :



(٢،٦) إذا علمت أن القيم الأسُية هي المسيطرة لقيم x الكبيرة ، ارسم بيان كل من الدالتين $y = xe^{-x}$ و $y = x^2e^{-x}$ لكل $x \geq 0$.

الحل :

بيان كل منهما مبين في الشكل أدناه :



(٢,٧) جـــد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

الحل :

بإكمال المربع نجد أن :

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 4 \quad \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 4$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 = 3^2$$

وبهذا يكون المركز هو $(1, -2)$ ونصف القطر يساوي 3.

لاحظ أن طريقة إكمال المربع التي استخدمناها تحول المعادلة الأصلية إلى معادلة على الصورة :

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$$

ومن ثم يكون مركز الدائرة عند النقطة (x_o, y_o) ونصف قطرها يساوي r.
وطريقة أخرى لإيجاد المركز ونصف القطر تكون بملاحظة أن المعادلة العامة للدائرة هي :

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2hy + c = 0$$

مركزها هو $(-g, -h)$ ونصف قطرها يساوي $\sqrt{g^2 + h^2 - c}$.

(٢,٨) ارسم القطع الناقص $x^2 + 4y^2 = 3٣$ ثم جد كلاً من الاختلاف المركزي وإحداثيات البؤرتين ومعادلة كل من الدليلين.

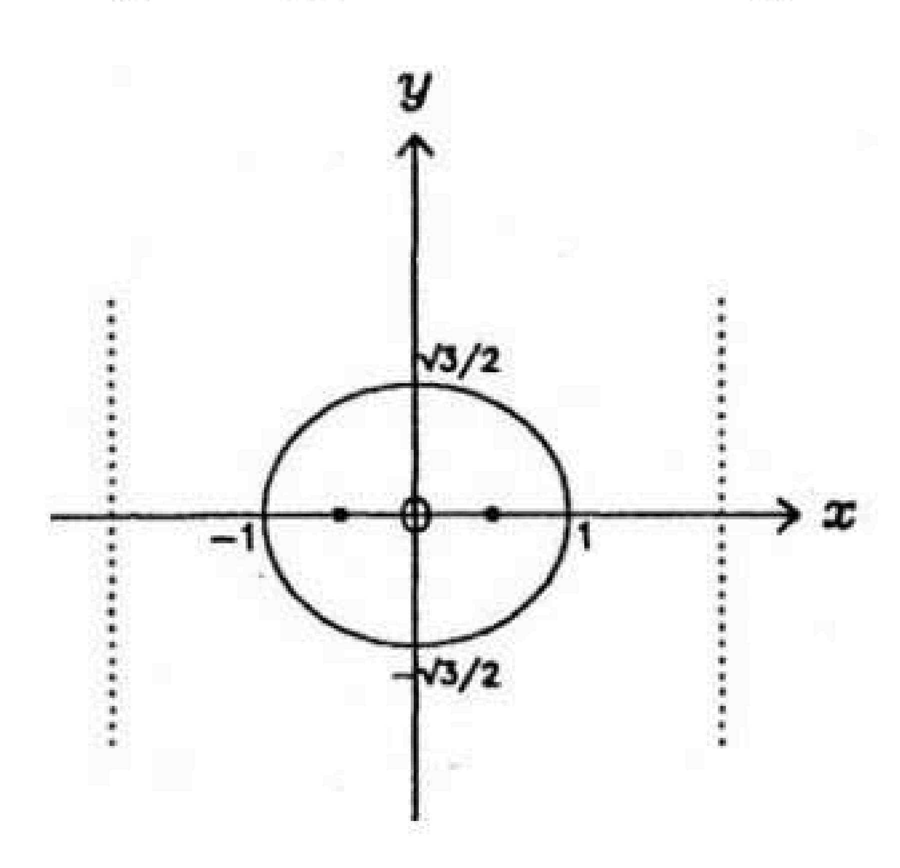
الحل :

أبسط معادلة للقطع الناقص هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

حيث إن المحورين الرئيس هما محورا x و y بطولين a^2 و ^{2} على التوالي.
ولذا ، نجد معادلة القطع المطلوب هي $x^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1$.

وعليه فإن ، $a = 1$ و $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ وبيان القطع مبين في الشكل أدناه :



العلاقة التي تربط الاختلاف المركزي بالقيمتين وهي $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$
وبهذا يكون $\varepsilon = \frac{1}{2}$. البؤرتان هما $(\pm a\varepsilon, 0)$. أي $(\pm \frac{1}{2}, 0)$ في هذا المثال. الدليلان هما المستقيمان $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm 2$.

(٢,٩) بتحليل المعادلة أولاً أو بأي طريقة أخرى مناسبة ، ارسم بيان المعادلة : $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 = 0$

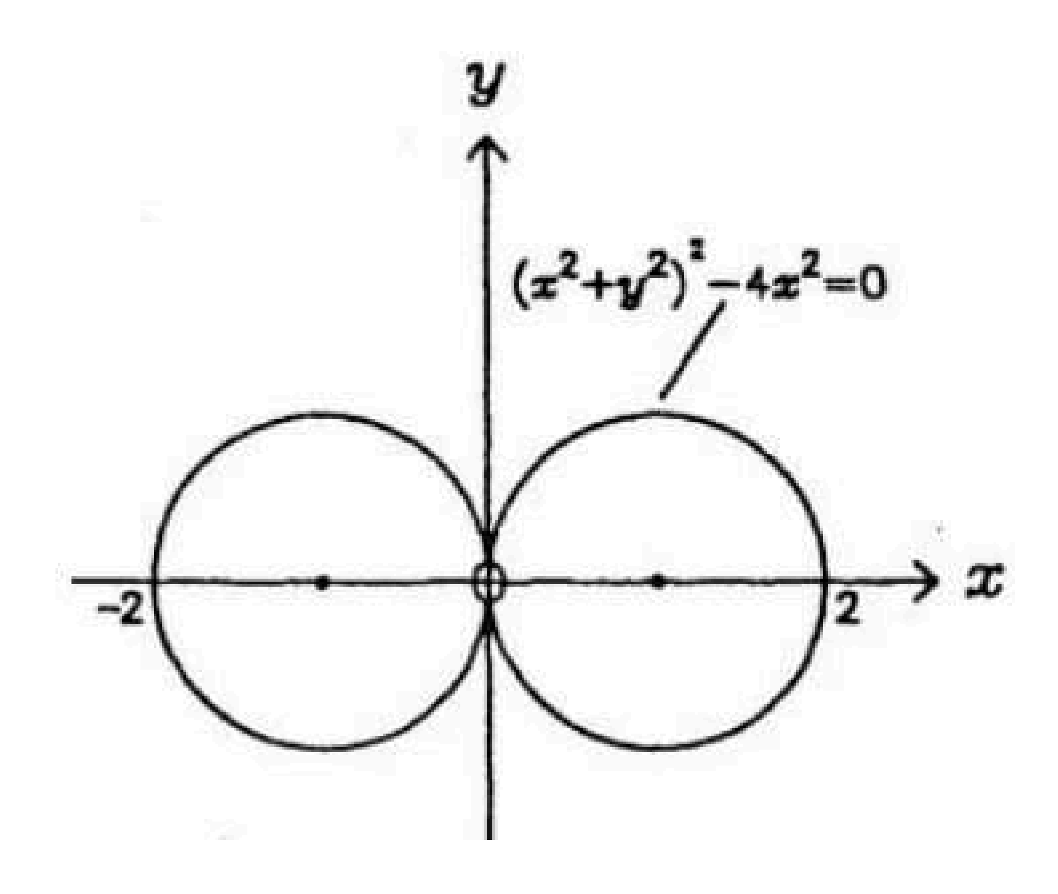
الحل :

بالتحليل كفرق بين مربعين $(a^2 - b^2 = (a-b)(a+b))$ نجد أن :

$$(x^2 + y^2 - 2x)(x^2 + y^2 + 2x) = 0$$

أي أن $x^2 - 2x + y^2 = 0$ أو $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

وبإكمال المربع لكل منهما نجد أن $(x-1)^2 + y^2 = 1$ أو $(x+1)^2 + y^2 = 1$ وبهذا فإن المعادلة الأولى دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها 1 والمعادلة الثانية دائرة مركزها $(-1,0)$ ونصف القطر 1 والبيانين هما :



إذا افترضنا أننا لم نقدم إرشاد التحليل سابقاً فإن أبسط طريقة لتناول المعادلة هي بكتابة :

$$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2$$

ومن ثم أخذ الجذر التربيعي للطرفين لنحصل على :

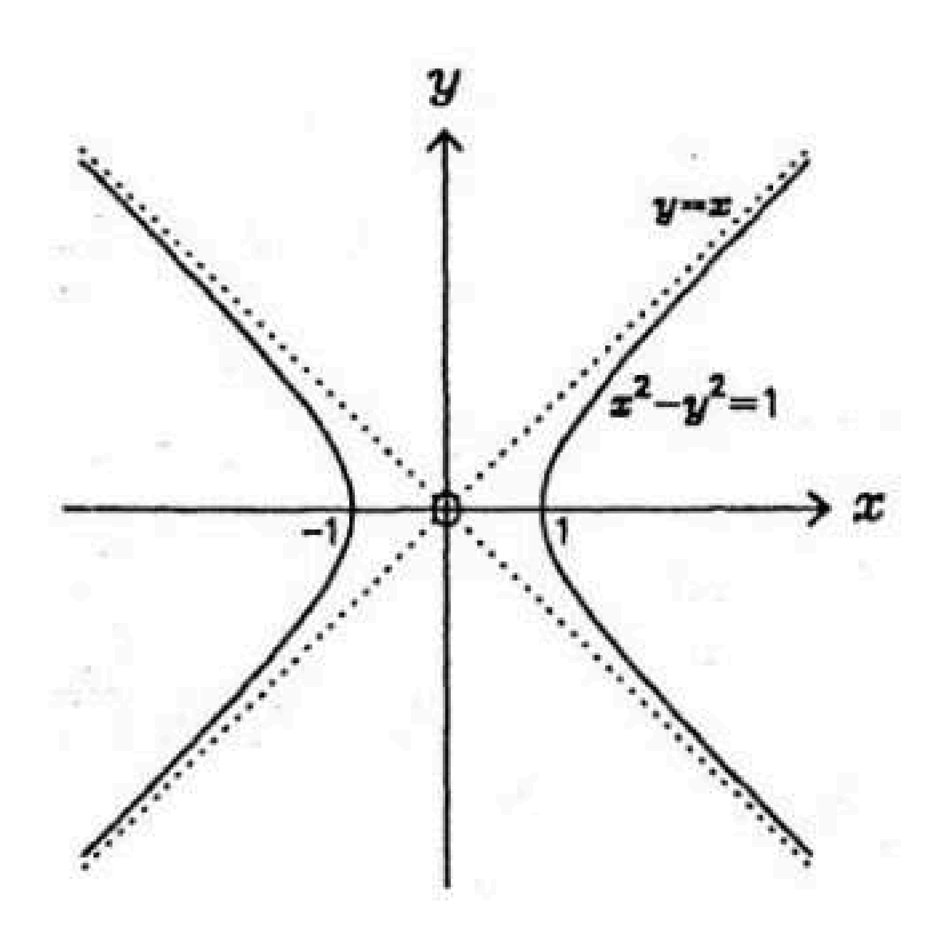
$$x^2 + y^2 = \pm 2x$$

وهذا بدوره يؤدي إلى معادلة دائرتين كما في السابق.

(٢,١١) ارسم القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ مبيناً الخطوط المقاربة.

الحل :

البيان موضح في الشكل أدناه :



الفصل الثالث

حساب المثلثات

TRIGONOMETRY

(٣,١) باستخدام تعريف الراديان ودالة الجيب بيّن أن $\theta \approx \sin\theta$ عندما تكون θ ومن ثم بيّن أن ذلك يؤدي إلى $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

الحل :

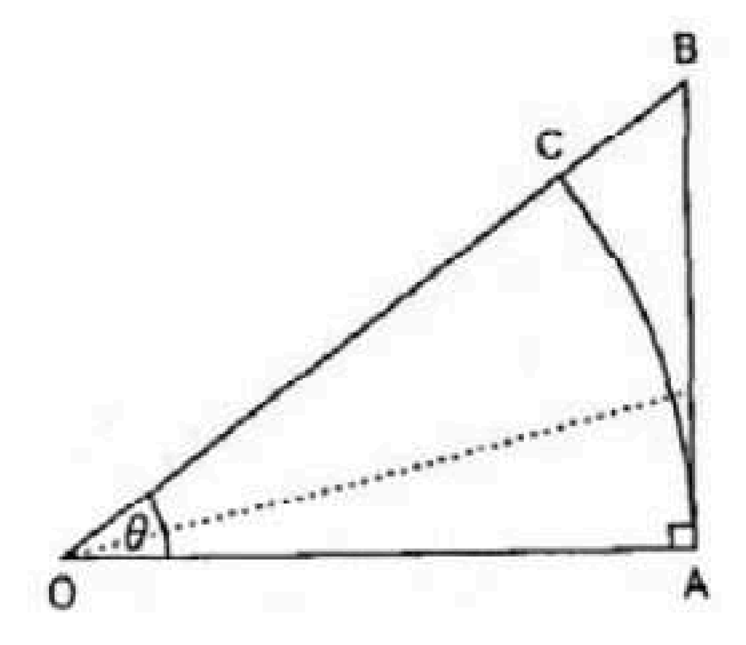
بالاستعانة بالرسم المقدم في الشكل أدناه نجد :

$$\theta = \frac{\text{طول القوس } AC}{OC} \quad \text{و} \quad \sin\theta = \frac{AB}{OB}$$

ولكن طول القوس $AC \rightarrow AB$ و $OC \rightarrow OB$ عندما $\theta \rightarrow 0$.

إذن ، $\sin\theta \approx \theta$ عندما $\theta \ll 1$.

وبما أن $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ فيكون $\cos\theta = 1 - 2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$ ونستنتج أن $\frac{\theta^2}{2}$ $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ عندما يكون $\theta \ll 1$.



(٣,٢) إذا كان $t = tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ فتجد كل من $tan\,\theta$ و $cos\,\theta$ و $sin\,\theta$ بدلالة t.

الحل :

إذا كان $t = tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ فبالاستعانة بالشكل المرفق ومبرهنة فيثاغورس نجد أن :

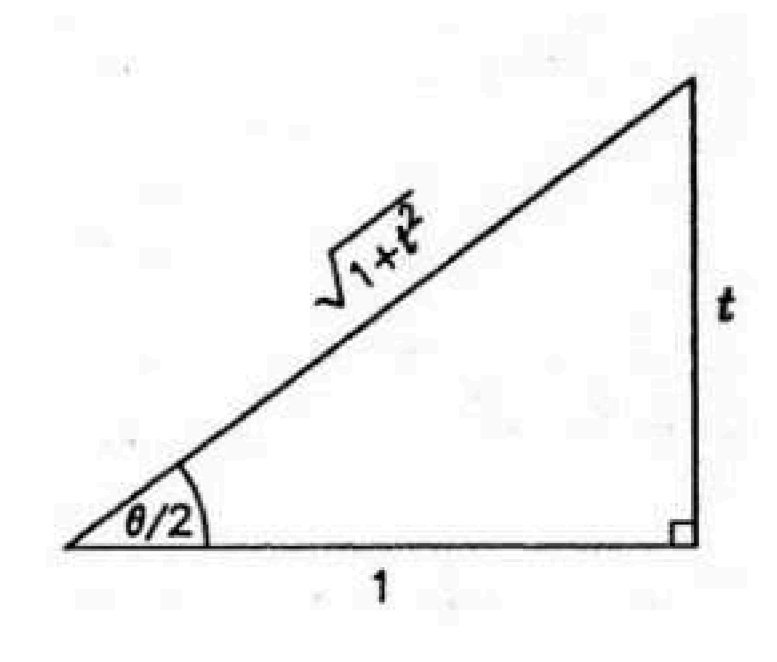
$$cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{و} \quad sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

الآن :

$$sin\,\theta = 2\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cos\,\theta = cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$tan\,\theta = \frac{sin\,\theta}{cos\,\theta} = \frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{2t}{1-t^2}$$



يُستخدم هذا التعويض في حساب تكاملات بعض الدوال المثلثية حيث تفاضله هو:

$$dt = \frac{1}{2} sec^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{2}\left[1 + tan^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)\right] d\theta$$

أي أن $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$.

(٣،٣) حل المعادلات التالية في المجال $-\pi < \theta < \pi$.
أ) $tan\,\theta = -\sqrt{3}$ ب) $sin(3\theta) = -1$ ج) $4cos^3\theta = \cos\theta$

الحل :

أ) حلول المعادلة $t\,an\theta = -\sqrt{3}$ هي $\theta = -\frac{\pi}{3}$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3}$

ب) إذا كانت $sin(3\theta) = -1$ فإن $3\theta = -\frac{5\pi}{2}$ أو $3\theta = -\frac{\pi}{2}$ أو $3\theta = \frac{3\pi}{2}$.

إذن ، $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ أو $\theta = -\frac{\pi}{6}$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}$.

ج) $4cos^3\theta - cos\,\theta = 0 \Rightarrow cos\,\theta\,(4cos^2\theta - 1) = 0$

ونجد أن $cos\,\theta = 0$ أو $\cos\theta \pm \frac{1}{2}$.

إذن ، $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ أو $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ أو $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$.

(٣,٤) اكتب $a\,sin\,\theta + b\,cos\,\theta$ على الصورة $A\,sin(\theta+\varphi)$ حيث إن A و φ يُكتبان بدلالة a و b. ثم حل المعادلة $sin\,\theta + cos\,\theta = \sqrt{\frac{3}{2}}$

الحل :

بما أن $sin(\theta+\varphi) = A\,cos\,\varphi\,sin\,\theta + A\,sin\,\varphi\,cos\,\theta$

فنجد $a\,sin\,\theta + b\,cos\,\theta = A\,cos\,\varphi\,sin\,\theta + A\,sin\,\varphi\,cos\,\theta$

وبمقارنة المعادلتين نجد أن :

$$A\cos\varphi = a$$
$$A\sin\varphi = b$$

وبهذا يكون $\frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi} = tan\,\varphi = \frac{b}{a}$

و $a^2 + b^2 = A^2(sin^2\varphi + cos^2\varphi) = A^2$.

إذن ، $A = \sqrt{a^2+b^2}$ و $\varphi = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.

ولحل المعادلة $sin\,\theta + cos\,\theta = \sqrt{\frac{3}{2}}$ لاحظ أولاً أن :

$sin\,\theta + cos\,\theta = \sqrt{2}\,sin(\theta + \frac{\pi}{4})$. وبهذا يكون :

$$\sqrt{2}\,sin(\theta+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

أي أن $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ونجد أن $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$ أو $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}$.

إذن ، $\theta = \frac{\pi}{12}$ أو $\theta = \frac{5\pi}{12}$.

(٣,٥) أثبت أن $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ ومن ثم اكتب $\sin 4\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$.

الحل :

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$$
$$= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1$$
$$= 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1$$
$$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta$$
$$= 2(2\sin\theta\cos\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$
$$= 4\sin\theta\cos^3\theta - 4\sin^3\theta\cos\theta$$

(٣,٦) أثبت أن $8\sin^4\theta = \cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3$ ومن ثم اكتب $8\cos^4\theta$ بصورة مشابهة.

الحل :

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

ولذا نرى أن :

$$8\sin^4\theta = 8(\sin^2\theta)^2 = 8\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)^2$$
$$= 2(1 - 2\cos2\theta + \cos^2 2\theta)$$
$$= 2 - 4\cos 2\theta + (2\cos^2 2\theta - 1) + 1$$
$$= 3 - 4\cos2\theta + \cos4\theta$$

$$8\cos^4\theta = 8(\cos^2\theta)^2 = 8\left(\frac{\cos2\theta + 1}{2}\right)^2$$
$$= 2(\cos^2 2\theta + 2\cos2\theta + 1)$$
$$= (2\cos^2 2\theta - 1) + 1 + 4\cos2\theta + 2$$
$$= \cos4\theta + 4\cos2\theta + 3$$

(٣,٧) أثبت أن :

$$\cos\theta + \cos3\theta + \cos5\theta + \cos7\theta = 4\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta$$

الحل :

بما أن $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ فإن:

$\cos5\theta + \cos7\theta = 2\cos6\theta\cos\theta$ و $\cos\theta + \cos 3\theta = 2\cos2\theta\cos\theta$

(لاحظ أن $\cos(-\theta) = \cos\theta$). وبهذا يكون:

$$\begin{aligned} cos\theta + cos3\theta + cos5\theta + cos7\theta &= 2cos\theta(cos2\theta + cos6\theta) \\ &= 2cos\theta(2cos4\theta cos2\theta) \\ &= 4cos\theta cos2\theta cos4\theta \end{aligned}$$

(٣,٨) باستخدام صيغة التحليل جد حيث إن $\pi > \theta > 0$ التي تحقق المعادلة:

$$cos\theta = cos2\theta + cos4\theta$$

الحل:

$$cos2\theta + cos4\theta = 2cos3\theta cos\theta$$

وبهذا نرى:

$$cos\theta = cos2\theta + cos4\theta \Rightarrow cos\,\theta(1 - 2cos3\theta) = 0$$

وعليه فإن:

$cos3\theta = \frac{1}{2}$ أو $cos\theta = 0$. ولذا نجد أن:

$3\theta = \frac{\pi}{3}$ أو $\frac{5\pi}{3}$ أو $\frac{7\pi}{3}$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}$. وبهذا يكون:

$\theta = \frac{\pi}{9}$ أو $\frac{\pi}{2}$ أو $\frac{5\pi}{9}$ أو $\frac{7\pi}{9}$.

(٣,٩) إذا كان طول رابطين بين ذرات جزئ ثلاثي الذرة هما $1.327A^\circ$ و $1.514A^\circ$ وكان مقياس زاوية الربط وصل بينهما يساوي 107.5° فاحسب المسافة بين أبعد ذرتين (انظر الشكل أدناه).

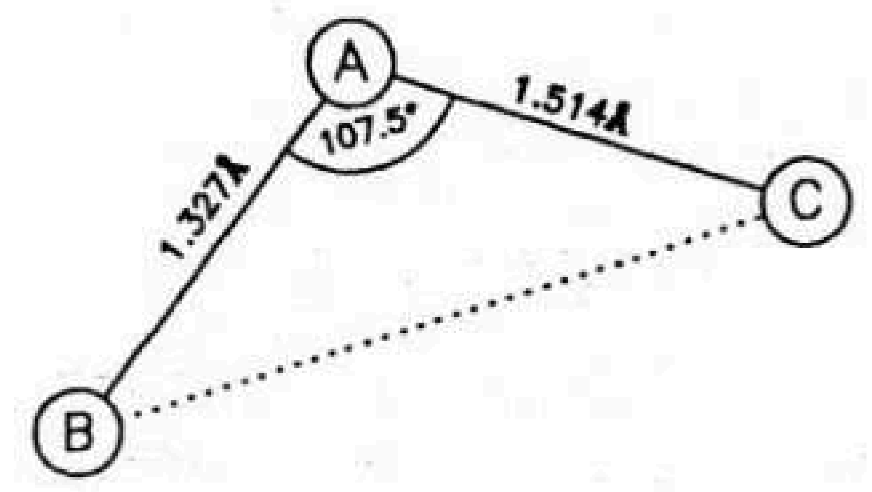
الحل :

باستخدام قاعدة جيب التمام لدينا :

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)cos(\widehat{BAC})$$
$$= (1.327)^2 + (1.514)^2 - 2 \times 1.327 \times 1.514 \times cos\ (107.5^\circ)$$
$$= 5.2614 A^{\circ 2}$$

وعليه فإن المسافة بين الذرتين B و C هي:

$BC = \sqrt{5.2614 A^{\circ 2}} = 2.294 A^\circ$.



الفصل الرابع

التفاضـــل

DIFFERENTIATION

(٤,١) جد مشتقة كل مما يلي باستخدام المبادئ الأولية (تعريف المشتقة).

أ) $y = cosx$.

ب) $y = x^n$ حيث إن n عدد صحيح موجب.

ج) $y = \frac{1}{x}$

د) $y = \frac{1}{x^2}$

الحل :

أ)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} (\frac{cos(x + \delta x) - cosx}{\delta x})$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{cos(\delta x)\, cosx - sin(\delta x)\, sinx - cosx}{\delta x} \right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{(1 - \delta x^2/2)cosx - \delta x sinx - cosx}{\delta x} \right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(-\frac{\delta x}{2} cosx - sinx \right)$$

إذن ، $\frac{d}{dx}(cosx) = -sinx$.

ب)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{(x+\delta x)^n - x^n}{\delta x}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{x^n + nx^{n-1}\delta x + n\,(n-1)/2x^{n-2}\delta x^2 + \cdots - x^n}{\delta x}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n}{2}(n-1)x^{n-2}\delta x + \cdots \right)$$

إذن ، $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

ج)

$$\frac{d}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{1/(x+\delta x) - 1/x}{\delta x}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{x - (x+\delta x)}{x(x+\delta x)\delta x}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{-1}{x(x+\delta x)}\right)$$

إذن ، $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

د)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{1/(x+\delta x)^2 - 1/x^2}{\delta x}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{x^2 - (x+\delta x)^2}{x^2(x+\delta x)^2\delta x}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{-2}{x(x+\delta x)^2} - \frac{\delta x}{x^2(x+\delta x)^2}\right)$$

إذن ، $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}$.

(٤,٢)	أثبت أن ميل المستقيم العمودي على المستقيم $y = mx + c$ يساوي $-\frac{1}{m}$.

الحل :

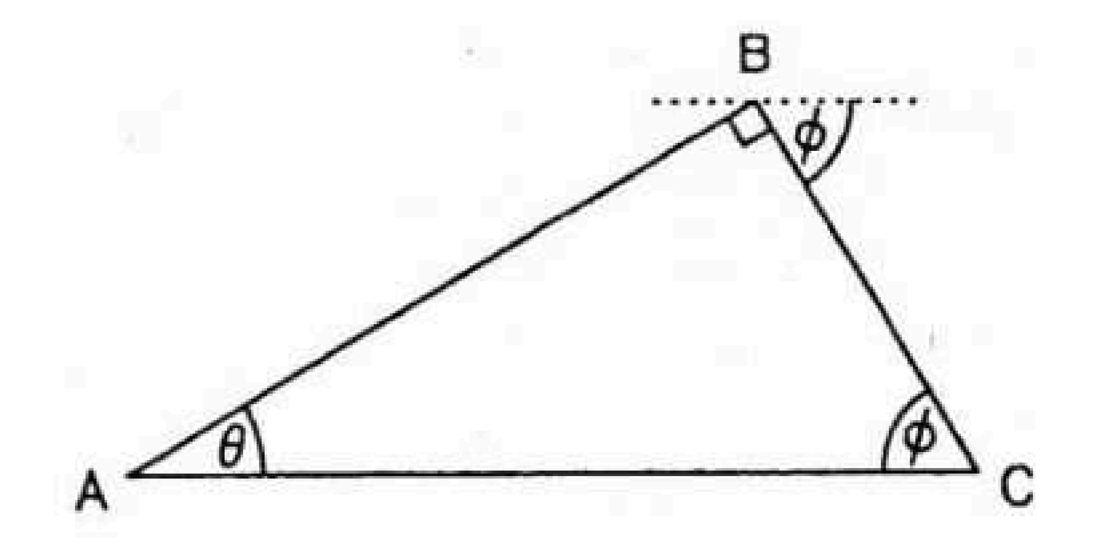
من الشكل المبين أدناه نجد أن :

ميل $\overrightarrow{AB} = tan\theta = \frac{BC}{AB}$.

ميل $\overrightarrow{BC} = -tan\varphi = -\frac{AB}{BC}$.

إذن ، ميل $\overrightarrow{AB} = \frac{-1}{\text{ميل } \overrightarrow{BC}}$.

وبهذا نخلص إلى أن ميل العمودي على $y = mx + c$ يساوي $-\frac{1}{m}$.



يوجد برهان جبري (ولكنه أطول من البرهان الهندسي) لهذه الحقيقة وإليك هذا البرهان.

نفرض أن إحداثيا نقطة تقاطع المستقيمين هما (x_o, y_o) ونفرض أن (x_1, y_1) نقطة واقعة على أحد المستقيمين وأن (x_2, y_2) نقطة واقعة على المستقيم الآخر. ونفرض أن m و μ ميلا المستقيمان. عندئذ ، بتعريف الميل واستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد أن :

$$\mu = \frac{y_2 - y_o}{x_2 - x_0} \quad \text{و} \quad m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

و

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_o)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

وبتبسيط المعادلة الأخيرة وإجراء بعض العمليات الجبرية تستطيع بسهولة إثبات أن $\mu = -\frac{1}{m}$.

(٤,٣) استخدم الخاصية الخطية للمؤثر التفاضلي وقانون مجموع المتتالية الهندسية غير المنتهية لإثبات أن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

حيث إن $|x| < 1$ ومن ثم احسب المجموع .

الحل :

لكل $|x| < 1$ لدينا :

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}(x^n) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1-x+x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

(٤,٤) جد مشتقة $y = cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ حيث إن $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$. هل النتيجة صحيحة لجميع قيم y ؟ ماهي مشتقة $tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ ؟

الحل :

إذا كان $y = cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ فإن $x = a\cos y$ حيث إن $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$.

وباشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى y نجد أن:

$$\frac{dx}{dy} = -asiny = -a\sqrt{1-cos^2 y} = -a\sqrt{1-x^2/a^2}$$

$$= -\sqrt{a^2-x^2}$$

إذن ، $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

وهذا صحيح فقط في المجال $2n\pi \le y \le (2n+1)\pi$ حيث إن n عدد صحيح ، انظر الشكل المرفق. على سبيل المثال، إذا كان $\pi < y < 2\pi$ فإن مشتقة الدالة $cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ تساوي $\frac{+1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

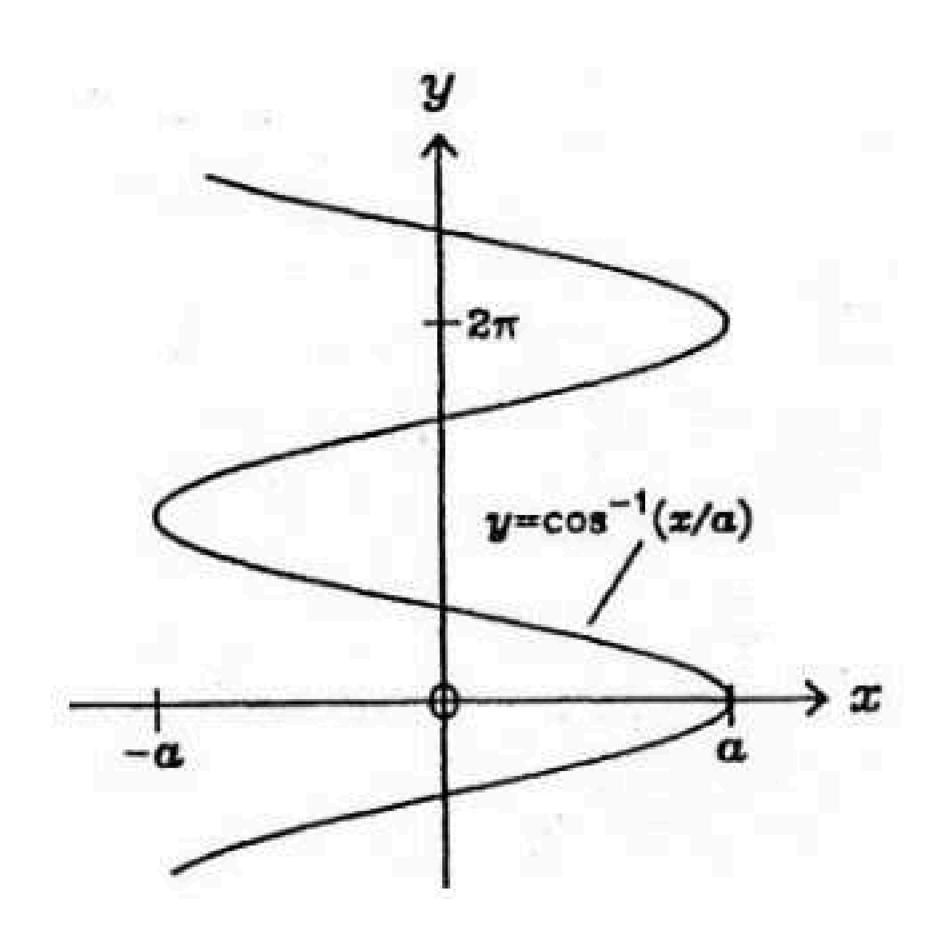
لإيجاد مشتقة $tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ لاحظ أن :

$$y = tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \Leftrightarrow x = a\,tany$$

إذن ،

$$\frac{dx}{dy} = a\,sec^2y = a(1+tan^2y) = a(1+\frac{x^2}{a^2}) = \frac{1}{a}(a^2+x^2)$$

ونستنتج أن : $\frac{d}{dx}\left[tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \frac{a}{a^2+x^2}$.



(٤,٥) جد المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ لكل من الدوال التالية :

أ) $y = (2x+1)^3$ ب) $y = \sqrt{3x-1}$

ج) $y = cos5x$ د) $y = sin\,(3x^2+7)$

هـ) $y = tan^4(2x+3)$ و) $y = xe^{-3x^2}$

ز) $y = xln(x^2+1)$ ح) $y = sinx/x$

الحل :

أ) $\frac{dy}{dx} = 3(2x+1)^2 \times 2 = 6(2x+1)^2$.

افترضنا في هذه المسألة ضمنياً أن $u = 2x + 1$ ومن ثم فإن $y = u^3$.

بعد ذلك استخدمنا قاعدة السلسلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

وحصلنا على النتيجة أعلاه من $\frac{dy}{du} = 3u^2$ و $\frac{du}{dx} = 2$.

ب) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x-1)^{-\frac{1}{2}} \times 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

ج) $\frac{dy}{dx} = -sin5x \times 5 = -5sin5x$

د) $\frac{dy}{dx} = \cos(3x^2+7) \times (6x) = 6x\cos(3x^2+7)$

هـ) $\frac{dy}{dx} = 4tan^3(2x+3) \times sec^2(2x+3) \times 2$

$= 8tan^3(2x+3)sec^2(2x+3)$

في هذا المسألة استخدمنا الصورة التالية لقاعدة السلسلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

حيث إن $v = 2x + 3$ و $u = tanv$ و $y = u^4$.

ومن ثم حصلنا على النتيجة بتعويض المشتقات:

$$\frac{dv}{dx} = 2 \quad و \quad \frac{du}{dv} = sec^2 v \quad و \quad \frac{dy}{du} = 4u^3$$

و) $$\frac{dy}{dx} = xe^{-3x^2}(-6x) + e^{-3x^2} = (1 - 6x^2)e^{-3x^2}$$

استخدمنا في هذا المسألة قاعدة الضرب للمشتقات:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

حيث إن $u = x$ و $v = e^{-3x^2}$. كما أننا استخدمنا قاعدة السلسلة لإيجاد $\frac{dv}{dx}$ حيث إن $w = -3x^2$ و $v = e^w$.

ز) $$\frac{dy}{dx} = x \times \frac{1}{x^2+1} \times 2x + ln(x^2+1) = \frac{2x^2}{x^2+1} + ln(x^2+1)$$

ح) $$\frac{dy}{dx} = \frac{xcosx - sinx}{x^2}$$

في هذه المسألة استخدمنا قاعدة مشتقة خارج قسمة دالتين:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du/dx - u\, dv/dx}{v^2}$$

حيث إن $u = sinx$ و $v = x$.

(٤,٦) جد مشتقة $y = a^x$ حيث إن a ثابت وذلك بأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة قبل الاشتقاق.

الحل:

$$y = a^x \Rightarrow lny = ln(a^x) = xlna$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = lna$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = ylna$$

إذن ، $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x lna$.

لاحظ أنه في الحالة الخاصة التي يكون فيها $a = e$ نحصل على:

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x lne = e^x$ وذلك لأن $lne = 1$.

(٤,٧) جد $\frac{dy}{dx}$ لما يلي :

أ) $x = t(t^2 + 2)$ و $y = t^2$

ب) $x^2 = ysin(xy)$

الحل :

أ) باستخدام قاعدة السلسلة لدينا :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{{dy}/{dt}}{{dx}/{dt}} = \frac{2t}{3t^2 + 2}$$

ب) باشتقاق طرفي المعادلة $x^2 = y(sinxy)$ ضمنياً بالنسبة إلى x نجد أن :

$$\begin{aligned} 2x &= y\frac{d}{dx}[sin(xy)] + sin\,(xy)\frac{d}{dx}[y] \\ &= ycos(xy)\frac{d}{dx}[xy] + sin\,(xy)\frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

$$= ycos(xy)\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+sin\,(xy)\frac{dy}{dx}$$

$$= y^2\,cos(xy)+\frac{dy}{dx}[xycos(xy)+sin\,(xy)]$$

إذن ، $$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y^2cos\,(xy)}{xycos(xy)+sin\,(xy)}$$

(٤,٨) جد النقاط الحرجة وصنفها لكل من الدوال التالية :

أ) $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{6}-x^3$

ب) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

ج) $U(r)=4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12}-\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$ حيث إن $r\geq 0$ و ε و σ ثابتان

د) $P(r)=\frac{r^2}{8a_o^3}(2-\frac{r}{a_o})e^{-r/a_o}$ حيث إن $r>0$ و a_o ثابت

الحل :

أ) لإيجاد النقاط الحرجة نضع المشتقة الأولى صفراً فنرى أن :

$$f'(x)=x^4-\frac{2x^3}{3}-3x^2=\frac{1}{3}x^2(3x^2-2x-9)$$

الآن $f'=0$ عندما $x=0$ أو $x=\frac{2\pm\sqrt{4+108}}{6}=\frac{1\pm2\sqrt{7}}{3}$.

إذن ، توجد نقاط حرجة عندما $x=0$ أو $x=\frac{1-2\sqrt{7}}{3}$ أو $x=\frac{1+2\sqrt{7}}{3}$.

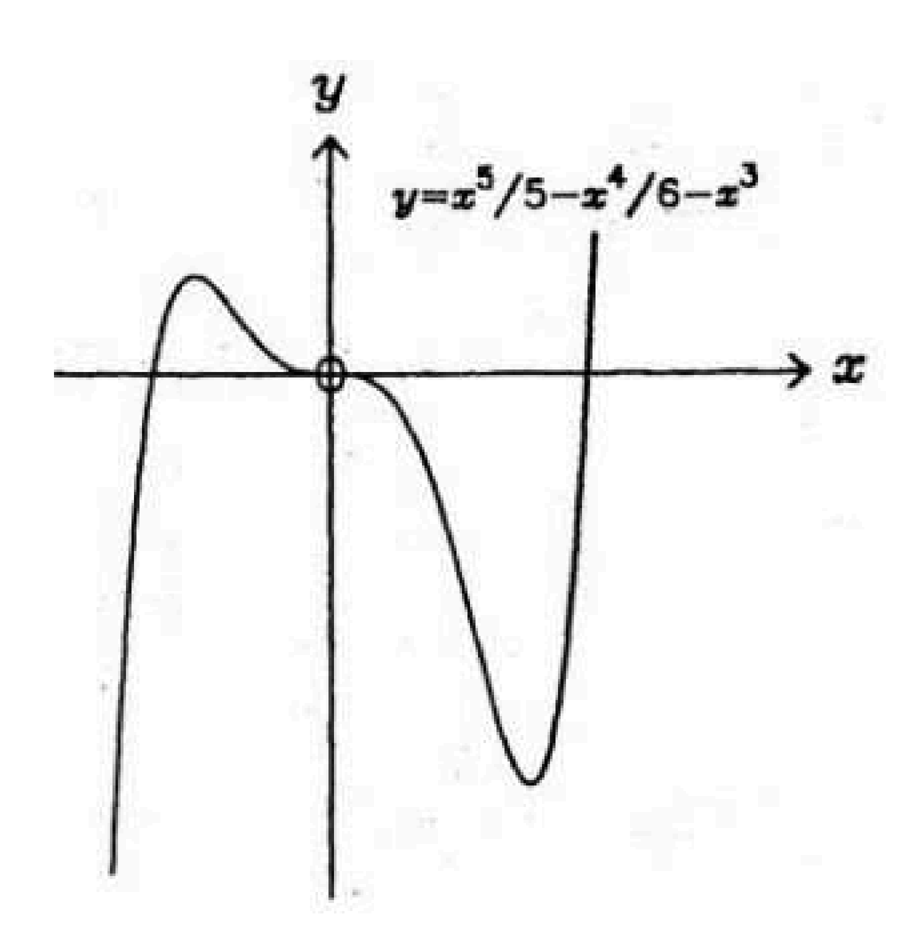
الآن ، لتصنيف النقاط الحرجة نجد المشتقة الثانية :

$$f''(x) = 4x^3 - 2x^2 - 6x$$

عندما $x = 0$ نجد أن $f''(x) = 0$ ومن ثم فإن اختبار المشتقة الثانية يفشل في تحديد ماهيتها. ولكن بملاحظة أن $(x) \longrightarrow -x^3$ عندما $x \longrightarrow 0$ نخلص إلى وجود نقطة انقلاب عندما $x = 0$.

عندما $x = \frac{1-2\sqrt{7}}{3}$ نجد أن $f''(x) < 0$ ومن ثم توجد نقطة عظمى .
عندما $x = \frac{1+2\sqrt{7}}{3}$ نجد أن $f''(x) > 0$ ويكون للدالة نقطة صغرى في هذه الحالة.

الشكل أدناه يبين منحنى الدالة :



ب) $$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-4x(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

الآن ، $f'(x)=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x\pm 1$

ومن ثم للدالة نقطتان حرجتان عندما $x=1$ و $x=-1$.

وبما أن $f''(1)=-\frac{1}{2}<0$ وأن $f''(-1)=\frac{1}{2}>0$

فيوجد قيمة عظمى عندما $x=1$ وقيمة صغرى عندما $x=-1$.

ج) $r>0$,

$$U(r)=4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12}-\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$$

$$U'(r)=4\varepsilon\left[-12\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{11}\frac{\sigma}{r^2}+6\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{5}\frac{\sigma}{r^2}\right]$$

$$=\frac{24\varepsilon}{\sigma}\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{7}-2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13}\right]$$

$$U''(r)=\frac{24\varepsilon}{\sigma}\left[-7\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\frac{\sigma}{r^2}+26\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12}\frac{\sigma}{r^2}\right]$$

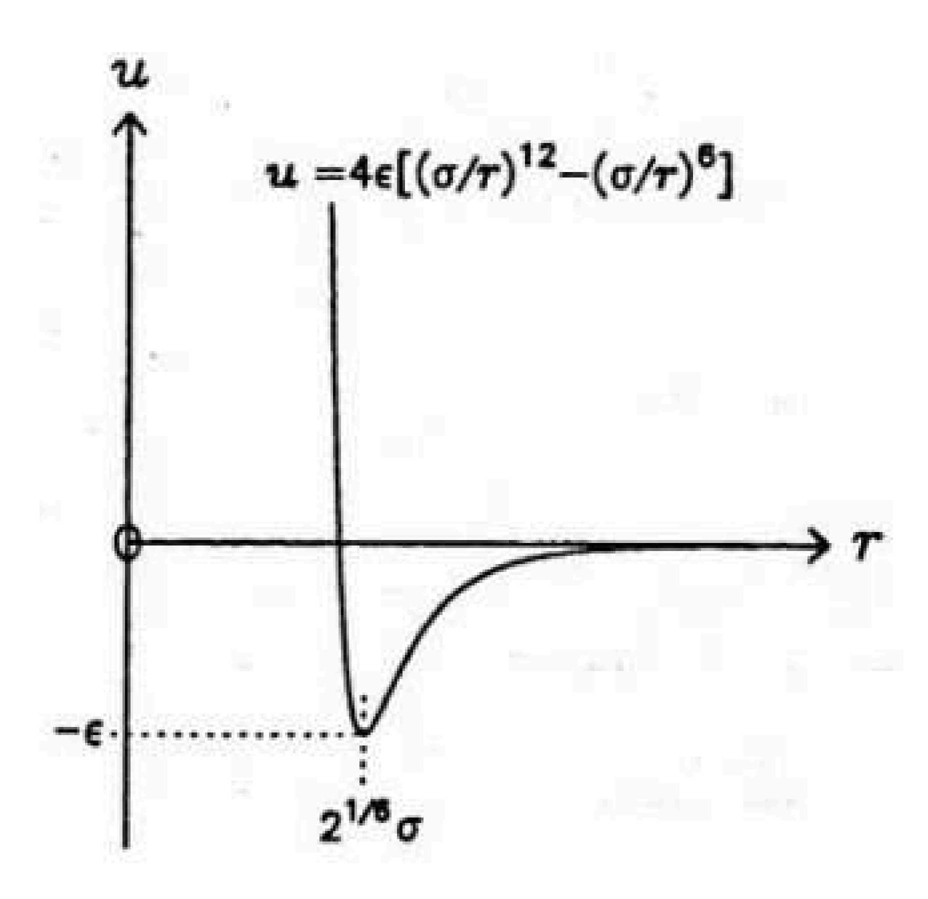
$$=\frac{24\varepsilon}{\sigma^2}\left[26\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{14}-7\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{8}\right]$$

الآن ، $U'(r)=0\Rightarrow\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{7}\left[1-2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]=0$

إذن ، $r\to\infty$ أو $r=2^{1/6}\sigma$.

وبما أن $U(r)\to 0$ عندما $r\to\infty$ فإنها ليست نقطة حرجة وبهذا النقطة الحرجة الوحيدة تحدث عندما $r=2^{\frac{1}{6}}\sigma$ وعندها تكون للدالة قيمة صغرى لأن $U''(2^{\frac{1}{6}}\sigma)>0$.

بيان الدالة مبين بالشكل أدناه.



الدالة $U(r)$ هي دالة الكُمون (٦,١٢) للينارد جونز وتُستخدم عادة لتقريب الطاقة الكامنة بين الجزيئات.

بينما لا توجد تفاعلات بين مكونات الغاز المثالي لكن هناك تفاعلات بين مكونات الغازات الحقيقية ، فمثلاً ، يوجد تنافر قصير المدى لمنع جزيئين من احتلال فراغ واحد وجاذبية طويلة المدى (من نمط ثنائي استقطاب محدث وثنائي استقطاب تفاعلي المعروف بنمط (فان دوالز) وتضعف هذه الجاذبية كلما ابتعدت الجزيئات بعضها عن بعض. تمثل القيمة الأمثل للفصل r التوازن بين هاتين القوتين المتضادتين وتحدث عند القيمة الصغرى للدالة $U(r)$.

د) $$P(r) = \frac{r^2}{8a_o^3}\left(2 - \frac{r}{a_o}\right)^2 e^{-r/a_o} \qquad , r \geq 0$$

$$P'(r) = \frac{1}{8a_o^3}\left[-\frac{r^2}{a_o}\left(2-\frac{r}{a_o}\right)^2 + 2r\left(2-\frac{r}{a_o}\right)^2 - \frac{2r^2}{a_o}\left(2-\frac{r}{a_o}\right)\right]e^{-r/a_o}$$

$$= \frac{r}{8a_o^3}\left(2-\frac{r}{a_o}\right)\left[\left(\frac{r}{a_o}\right)^2 - 6\frac{r}{a_o} + 4\right]e^{-r/a_o}$$

$$P''(r) = \frac{1}{8a_o^3}\left\{\left(2-\frac{r}{a_o}\right)\left[\left(\frac{r}{a_o}\right)^2 - 6\frac{r}{a_o} + r\right]\right.$$

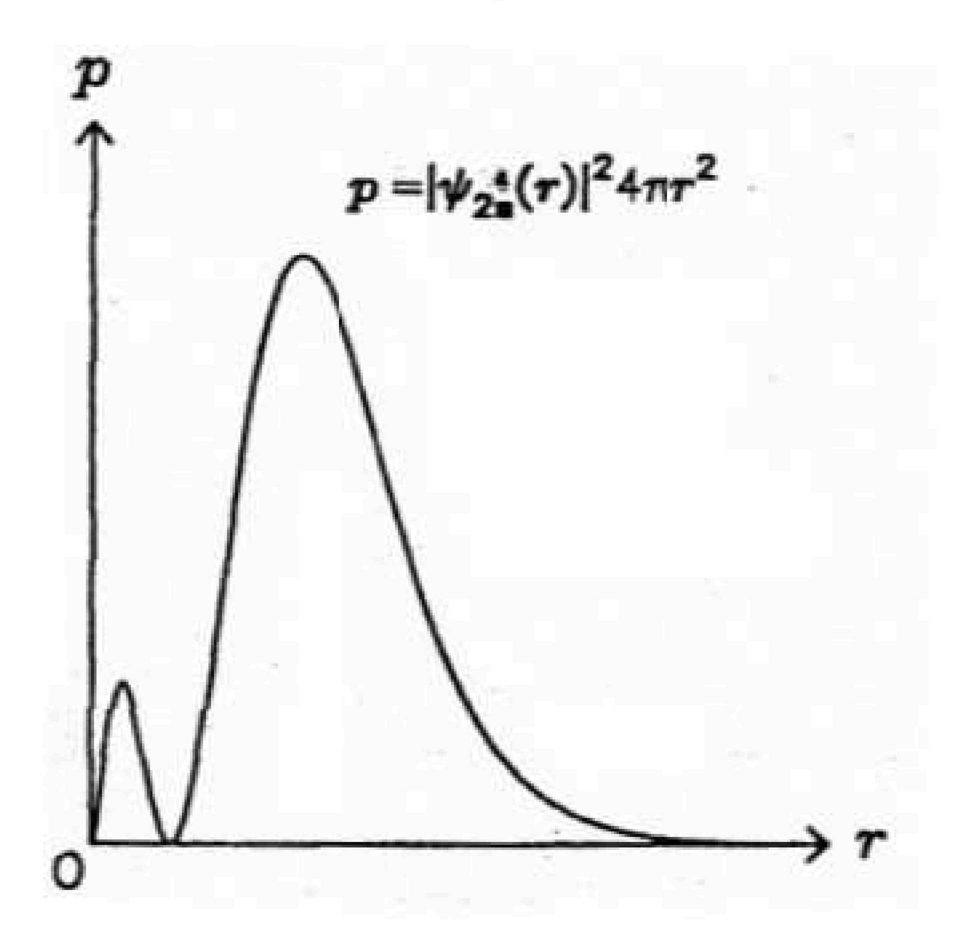
$$-\frac{4}{a_o}\left[\left(\frac{r}{a_o}\right)^2 - 6\frac{r}{a_o} + 4\right] + \frac{r}{a_o}\left(2-\frac{r}{a_o}\right)\left[2\frac{r}{a_o} - 6\right]$$

$$\left.-\frac{r}{a_o}(2-\frac{r}{a_o})\left[\left(\frac{r}{a_o}\right)^2 - 6\frac{r}{a_o} + 4\right]\right\}e^{-r/a_o}$$

$$= \frac{1}{8a_o^3}\left[\left(\frac{r}{a_o}\right)^4 - 12\left(\frac{r}{a_o}\right)^3 + 40\left(\frac{r}{a_o}\right)^2 - 40\left(\frac{r}{a_o}\right) + 8\right]e^{-r/a_o}$$

الآن ، $P'(r) = 0$ عنـــــــــدما $r = 0$ أو $r = 2a_0$ أو $r = (3 \pm \sqrt{5})a_0$ أو $r \longrightarrow \infty$.

إذن ، توجد نقاط حرجة عندما $r = 2a_0$ أو $r = (3 \pm \sqrt{5})a_0$ ، أما عندما يكون $r = 0$ أو $r \longrightarrow \infty$ فلا توجد نقاط حرجة. توجد قيمة صغرى واحـدة عنـدما $r = 2a_0$ لأن $P''(2a_0) > 0$ وقيمتـان عظميتـان عنـدما $r = (3 \pm \sqrt{5})a_0$ لأن $P''((3 \pm \sqrt{5})a_0) > 0$. بيـان الدالـة موضـح في الشكل أدناه.



الدالـة $P(r)$ هـي دالـة الكثافـة الإشـعاعية الاحتماليـة لإلكـترون ذرة هيدروجين في الحالة $2s$. أي أن احتمال وجود إلكترون في الفترة الصغيرة من r إلى $r + \delta r$ عـــن النـــواة يســـاوي $P(r)\delta r$ حيـــث إن $P(r) = |\Psi_{2s}|^2 4\pi r^2$. عـلاوة علـى القيمـة العظمـى الأساسـية عنـدما $r = (3 + \sqrt{5})a_0$ حيث الاحتمال الأكبر لوجود الإلكترون فتوجد قيمة عظمى أصغر وهـي أقـرب إلى النـواة عنـدما $r = (3 - \sqrt{5})a_0$ وتعتبر مؤشـراً علـى تـأثير الاختراق ، كما تقدم معلومات مهمة عن سلوك الإلكترونات عند غلاف الذرة.



الفصل الخامس

التكامــل

INTEGRATION

(٥,١) احسب تكامل كل من الدوال التالية بالنسبة إلى .

أ) $x + \sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$ ب) $\sqrt{x}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

ج) 2^x د) e^{2x}

هـ) $\dfrac{1}{2x-1}$ و) $sin(2x) + cos\,(3x)$

ز) $tanx$ ح) $sin^2(x)$

ط) $\dfrac{x}{1+x^2}$ ي) $\dfrac{1}{1+x^2}$

الحل :

أ)

$$\int \left(x + \sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx = \int \left(x + x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - lnx + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - lnx + C$$

ب)
$$\int \sqrt{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$= \frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$$
$$= 2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5} - 1\right) + C$$

ج)
$$\int 2^x dx = \frac{1}{ln2} 2^x + C$$

د)
$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

هـ)
$$\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln{(2x-1)} + C$$

فرضنا ضمنياً في هذا التكامل أننا قمنا بتعويض $u = 2x - 1$ ومن ثم $du = 2dx$ وبهذا نحصل على:

$$\int \frac{dx}{2x-1} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} lnu + C$$

و)
$$\int (sin(2x) + cos\,(3x))dx = -\frac{1}{2}cos(2x) + \frac{1}{3}sin\,(3x) + C$$

$$\int tanxdx = \int \frac{sinx}{cosx}dx = -ln(cosx) + C$$
$$= ln(secx) + C$$

بكتابة $tanx = \frac{sinx}{cosx}$ يكون من الواضح أن مشتقة المقام هي البسط (باستثناء الإشارة).

وإذا أردنـــا إعطـاء تفاصـــيل أكثـر نفـــرض أن $u =$ ومـن ثـم $.du = -sinxdx$

ويكون:

$$\int \frac{sinx}{cosx}dx = -\int \frac{du}{u} = -lnu + C$$

ز)
$$\int sin^2xdx = \frac{1}{2}\int (1 - cos(2x))dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}sin(2x)\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sin(2x) + C$$

ح)
$$\int \frac{x}{1 + x^2}dx = \frac{1}{2}ln(1 + x^2) + C$$

حصلنا على هذا التكامل لأن مشتقة المقام هي البسط (باستثناء معامل ثابت).

أما إذا أردنا تفاصيل التعويض فهو $u = 1 + x^2$ ومن ثم $.du = 2xdx$

ط)
$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = tan^{-1}x + C$$

على الرغم من كتابة الإجابة بسطر واحد (لأن هذا هو أحد التكاملات الأساسية) ، إلاّ أنه من الممكن إجراء هذا التكامل بتعويض $.x = tan\theta$

ومن ثم $.dx = sec^2\theta d\theta = (1 + tan^2\theta)d\theta = (1 + x^2)d\theta$

وبهذا يكون:

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \int d\theta = \theta + C = tan^{-1}(x) + C$$

(٥,٢) احسب تكامل كل من الدوال التالية بالنسبة إلى .

أ) $\int_0^{\pi/2} sin^4x\, cosxdx$ ب) $\int_0^{\pi/2} sin^4x\, dx$

ج) $\int_0^{4} \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}} dx$

الحل :

أ)

$$\int_0^{\pi/2} sin^4x\, cosxdx = \left[\frac{1}{5} sin^5x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{5}\left[sin^5\left(\frac{\pi}{2}\right) - sin^5(0)\right]$$

$$= \frac{1}{5}$$

إن وجود مشتقة $sinx$ ساعد على إيجاد هذه التكامل بسهولة حيث قمنا بتعويض $u = sinx$ ومن ثم $du = cosxdx$ مما يؤدي إلى

$$\int sin^4x\, cosxdx = \int u^4\, du$$

أما إذا لم تكن مشتقة $sinx$ موجودة فإن إجراء التكامل يحتاج إلى مجهود أكثر ويمكن حسابه في مثل هذه الحالة باستخدام متكرر لصيغة ضعف الزاوية $cos(2x) = 1 - 2sin^2x$.

ب) باستخدام التمرين (٣,٦) لدينا $8sin^4\theta = cos\, 40 - 4\, sin\, 20 + 3$.

وبهذا يكون :

$$\int_0^{\pi/2} sin^4 x\, dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (cos(4x) - 4\,cos(2x) + 3)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}sin(4x) - 2\,sin(2x) + 3x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}(sin2\pi - sin0) - 2(sin\pi - sin\theta) + 3\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)\right]$$

$$= \frac{3\pi}{16}$$ (١)

ج) لنفرض أن $I = \int_0^4 \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}}$.

بوضع $u^2 = 2x + 1$ نجد أن $2udu = 2dx$.

إذن ،

$$I = \int_{u=1}^{u=3} \frac{\frac{1}{2}(u^2 - 1) + 3}{u}(udu)$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2} + 3\right) du$$

$$= \left[\frac{1}{6}u^3 + \frac{5}{2}u\right]_1^3$$

---

(١) المترجم : كما ذُكر في نهاية حل الفقرة (أ) من هذا التمرين فإنه يمكن استخدام التطبيق المتكرر لصيغة ضعف الزاوية $cos(2x) = 1 - 2sin^2 x$ لحساب هذا التكامل وبصورة عامة تكامل أي دالة على الصورة $sin^n(x)$ أو $cos^n(x)$ حيث إن n عدد صحيح موجب زوجي.

$$= \frac{27}{6} + \frac{15}{2} - \frac{1}{6} - \frac{5}{2}$$

$$= \frac{13}{3} + 5 = 9\frac{1}{3}$$

وطريقة أخرى لحساب هذا التكامل هي استخدام التكامل بالأجزاء حيث نكامل $(2x+1)^{-1/2}$ ونشتق $x+3$ لنحصل على :

$$\int_0^4 \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \Big[[(x+3)\sqrt{2x+1}]\Big]_0^4 - \int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$$

$$= 21 - 3 - \left[\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\right]_0^4$$

$$= 18 - \frac{1}{3}\left[9^{3/2} - 1\right]$$

$$= 18 - \frac{26}{3} = 9\frac{1}{3}$$

(٥,٣) احسب تكامل كل من صيغ الكسور الجزئية المقدمة في التمرين(١,٩).

الحل :

أ)

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= ln(x-3) - ln(x-2) + C$$

$$= ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right) + C$$

ب)

$$\int \frac{x^2-5x+1}{(x-1)^2(2x-3)}dx$$
$$= 3\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 9\int \frac{dx}{x-1} - 17\int \frac{dx}{2x-3}$$
$$= -\frac{3}{x-1} + 9\,ln(x-1) - \frac{17}{2}ln(2x-3) + C$$

ج)

$$\int \frac{11x+1}{(x-1)(x^2-3x-2)}dx$$
$$= \int \frac{3x+5}{x^2-3x-2}dx - 3\int \frac{dx}{x-1}$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-3}{x^2-3x-2}dx + \frac{19}{2}\int \frac{dx}{x^2-3x-2} - 3\int \frac{dx}{x-1}$$
$$= \frac{3}{2}ln(x^2-3x-2) + \frac{19}{2}\int \frac{dx}{(x-3/2)^2 - \left(\sqrt{17}/2\right)^2}$$
$$- 3\,ln(x-1) + C$$
$$= 3\,ln\left(\frac{\sqrt{x^2-3x-2}}{x-1}\right) - \frac{19}{\sqrt{17}}tanh^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{17}}\right) + K$$

لحساب هذا التكامل استخدمنا العديد من المعالجات (كما هو الحال في الكثير من التكاملات). بدأنا بوضع الدالة المكاملة كمجموع كسور جزئية كما هو مبين في التمرين (١.٩) وبعد ذلك كتبنا البسط على الصورة $3x+5 = \frac{3(2x-3)}{2} + \frac{19}{2}$ وبهذا حصلنا على الجزء الأول من التكامل. ثم قمنا بإكمال المربع للمقام x^2-3x-2 وذلك لاستخدام القاعدة المعلومة $\frac{d}{d\theta}\left[tanh^{-1}\left(\frac{\theta}{a}\right)\right] = \frac{a}{a^2-\theta^2}$. كان من الممكن أيضاً استخدام $tanh^{-1}\left(\frac{\theta}{a}\right) = \frac{1}{2}ln\left(\frac{a+\theta}{a-\theta}\right)$ أو إثبات ذلك من التكامل بتحليل المقام.

$$\theta^2 - a^2 = (\theta - a)(\theta + a)$$

حيث إن $\theta = x - \frac{3}{2}$ و $a = \frac{\sqrt{17}}{2}$ ومن ثم استخدام الكسور الجزئية.

(٥,٤) استخدم التكامل بالأجزاء لإثبات ما يلي :

أ) $\int x\, sinx dx = C - xcosx + sinx$

ب) $\int sinx\, e^{-x} dx = C - \frac{1}{2}(sinx + cosx)e^{-x}$

الحل :

أ)

$$\int x\, sinx dx = -xcosx + \int cosx\, dx$$

$$= -xcosx + sinx + C$$

ب)

بوضع $I = \int (sinx)\, e^{-x} dx$ نرى أن:

$$I = -e^{-x} sinx + \int e^{-x} cosx\, dx$$

$$= -e^{-x} sinx - e^{-x} cosx - \int e^{-x} sinx\, dx$$

$$= -(sinx + cosx)e^{-x} - \mathrm{I}$$

إذن ،

$$\int sinx\, e^{-x} dx = -\frac{1}{2}(sinx + cosx)e^{-x} + C$$

(٥,٥) إذا كان :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} sin^n\, xdx \qquad \text{حيث إن } n \geq 1$$

فأثبت أن $nI_n = (n-1)I_{n-1}$ ومن ثم استخدم هذه العلاقة لحساب I_5 و I_8

الحل :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} sin^{n-1}\, xsinxdx \quad \text{حيث إن } n \geq 1$$

إذن :

$$I_n = [-sin^{n-1}x\, cosx]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} sin^{n-2}x\, cos^2xdx$$

$$= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} sin^{n-2}x\,(1-sin^2x)dx$$

$$= (n-1)\left\{\int_0^{\pi/2} sin^{n-2}x\, dx - \int_0^{\pi/2} sin^nx\, dx\right\}$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

وبهذا يكون :

$$\frac{I_n}{(n-1)} + I_n = I_{n-2}$$

إذن ، $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ حيث إن $n \geq 1$.

بما أن :

$$I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}$$

فإن:

$$I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} I_1$$

ولكن

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} sinx\, dx = [-cosx]_0^{\pi/2} = 1$$

إذن ،

$$I_5 = \frac{8}{15}$$

أيضاً :

$$I_8 = \frac{7}{8} I_6 = \frac{7}{8} \times \frac{5}{6} I_4 = \frac{7}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} I_0$$

ولكن $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$. إذن :

$$I_8 = \frac{35\pi}{256}$$

(٥،٦) إذا كان $(-x) = -f(x)$ فأثبت أن $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$

جد صيغة مماثلة للتكامل إذا كانت f دالة متماثلة (أي زوجية).

الحل :

لاحظ أن :

https://maktbah.net

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad (x=-u \text{ بوضع})$$

$$= \int_{a}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad (\mathrm{R}(-u) = -f(u) \text{ لأن})$$

$$= -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

للحصول على النتيجة أعلاه بدأنا بتجزئة التكامل من $-a$ إلى a إلى جزئين (جزء لقيم x الموجبة والجزء الآخر لقيم x السالبة). بعد ذلك استخدمنا التعويض $u = -x$ (وبهذا $du = -dx$) ومن ثم استفدنا من كون الدالة المكاملة تخالفية وبدلنا حدود التكامل. وبهذا جصلنا على الفرق بين تكاملين متساويين. إن تكامل الأول بالنسبة إلى u والآخر بالنسبة إلى x لايؤثر على قيمة التكامل المحدد لأن القيمة النهائية للتكامل تعتمد فقط على a وليس على الطريقة التي كتبت فيها الدالة كدالة في المتغير x أو في المتغير u.

في الحالة التي تكون فيها الدالة تماثلية ، أي $f(-x) = f(x)$ فإن الخطوات السابقة تؤدي إلى:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

في الحقيقـة ، يمكـن كتابـة أي دالـة كترتيـب خطـي لـدالتين أحـداهما تماثليـة والأخرى تخالفية على النحو التالي :

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

حيث الجزء الأول من الطرف الأيمن دالة تماثلية والجزء الثاني دالة تخالفية.

الفصل السادس

متسلسلة تايلور

TAYLOR SERIES

(٦,١) جد متسلسلة تايلور للدالة $sin\,(x+\frac{\pi}{6})$ لقيم x الصغيرة.

الحل :

$$f(x)=sinx \quad ، \quad f(\pi/6)=1/2$$

$$f'(x)=cosx \quad ، \quad f'(\pi/6)=\sqrt{3}/2$$

$$f''(x)=-sinx \quad ، \quad f''(\pi/6)=-1/2$$

$$f'''(x)=-cosx \quad ، \quad f'''(\pi/6)=-\sqrt{3}/2$$

$$f''''(x)=sinx \quad ، \quad f''''(\pi/6)=1/2$$

ولكن
$$f(x+a)=f(a)+xf'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+\frac{x^3}{3!}f'''(a)+\cdots$$

إذن ،
$$sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{4}x^2-\frac{\sqrt{3}}{12}x^3+\frac{1}{48}x^4+\cdots$$

(٦,٢) جد صيغة ذات الحدين للمقدار $(1+x)^n$. وبكتابة $\sqrt{c}$ على الصورة $a(1+b)^{i/2}$ حيث إن a و b ثابتان مناسبان ، احسب $\sqrt{8}$ و $\sqrt{17}$ مقربة لأربع مراتب عشرية.

الحل :

$f(x) = x^n$ ، $f(1) = 1$

$f'(x) = nx^{n-1}$ ، $f'(1) = n$

$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ ، $f''(1) = n(n-1)$

$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ ، $f'''(1) = n(n-1)(n-2)$

ولكن

$$f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \frac{x^3}{3!}f'''(a) + \cdots$$

إذن ،

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \cdots$$

حيث إن $|x| < 1$.

إذا كان $n = \frac{1}{2}$ فإن:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots$$

حيث إن $|x| < 1$.

$$\sqrt{8} = \sqrt{9-1} = 3\sqrt{1-1/9}$$

وبهذا يكون

$$\sqrt{8} = 3\left[1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{9}\right)^3 - \frac{5}{128}\left(-\frac{1}{9}\right)^4 + \cdots\right]$$

$$= 3\left[1 - \frac{1}{18} - \frac{1}{648} - \frac{1}{11664} - \frac{5}{839808} - \cdots\right]$$

$= 2.8284$ (مقرباً لأربع مراتب عشرية)

كذلك :

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = 4\sqrt{1+1/16}$$

ونرى أن

$$\sqrt{17} = 4\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{16}\right)^3-\cdots\right]$$

$$= 4\left[1+\frac{1}{32}-\frac{1}{2048}-\frac{1}{65536}+\cdots\right]$$

$= 4.1231$ (مقرباً لأربع مراتب عشرية)

من المعلوم أن تقارب صيغة ذات الحدين سريع جداً عندما يكون $|x| \to 0$. فمثلاً ، إذا أضفنا الحد x^2 (وهو -1.25×10^{-15}) عند حساب :

$\sqrt{1.0000001} = (1+10^{-7})^{1/2}$ فإننا نحصل على تقريب أفضل من التقريب الذي نحصل عليه باستخدام معظم الآلات الحاسبة.

إن أفضل طريقة لحساب $\sqrt{a^2+b^2}$ حيث إن $b \ll a$ هي باستخدام مفكوك ذات الحدين :

$$\sqrt{a^2+b^2} = a\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= a\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^4+\frac{1}{16}\left(\frac{b}{a}\right)^6-\cdots\right]$$

وذلك لتلافي ما يُسمى "خطأ التقريب" حتى لو استخدمت أجهزة حاسب آلي عالية الدقة.

(٦,٣) جد متسلسلة تايلور لكل من $ln\,(1+x)$ و $ln\,(1-x)$ ومن ثم جد متسلسلة قوى للدالة $ln[(1+x)/(1-x)]$

الحل :

$$f(1) = 0 \quad ، \quad f(x) = lnx$$
$$f'(1) = 1 \quad ، \quad f'(x) = x^{-1}$$
$$f''(1) = -1 \quad ، \quad f''(x) = -x^{-2}$$
$$f'''(1) = 2 \quad ، \quad f'''(x) = 2x^{-3}$$
$$f''''(1) = -6 \quad ، \quad f''''(x) = -6x^{-4}$$
$$f'''''(1) = 24 \quad ، \quad f'''''(x) = 24x^{-5}$$

ولكن $f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \frac{x^3}{3!}f'''(a) + \cdots$

إذن ،

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$ حيث إن $|x| < 1$.

وبتعويض $x = -$ في الصيغة أعلاه نجد أن :

$$ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots$$ حيث إن $|x| < 1$.

وبهذا يكون

$$ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = ln(1+x) - ln\,(1-x)$$
$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$ حيث إن $|x| < 1$.

(٦،٤) جد متسلسلة ماكلورين للدالة $cos^{-1}(x)$.

الحل :

متسلسلة ماكلورين هي حالة خاصة لمتسلسلة تايلور عندما يكون $a = 0$ (حول نقطة الأصل). ومن الممكن الحصول عليها بالطريقة الاعتيادية. أي بإيجاد

مشتقات $cos^{-1}(x)$ ومن ثم قيم هذه المشتقات عندما $x = 0$. ولكننا سنستخدم طريقة أسهل من ذلك وهي إيجاد مشتقة $cos^{-1}(x)$ مرة واحدة فقط ومن ثم استخدام صيغة ذات الحدين واجراء التكامل للناتج حداً حداً.

بوضع $f(x) = cos^{-1}(x)$ نجد أن $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-1/2}$

ولكن $(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \cdots$

إذن ،

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$= C - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 - \frac{35}{1152}x^9 - \cdots$$

وبما أن $\frac{1}{2} = cos^{-1}(0)$ فإن $\frac{\pi}{2} = C$. إذن ،

$$cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} - \cdots$$

يجب ملاحظة أن متسلسلة ماكلورين صحيحة فقط عندما يكون $|x| < 1$ و $0 \le cos^{-1}(x) \le \pi$.

(٦،٥) احسب قيمة النهايات التالية :

أ) $\lim_{x\to 0} \frac{sinax}{x}$

ب) $\lim_{x\to 0} \frac{cosx - 1}{x}$

ج) $\lim_{x\to 0} \frac{2cosx + xsinx - 2}{x^4}$

الحل:

أ)

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{ax - a^3 x^3/6 + \cdots}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(a - \frac{a^3}{6}x^2 + \cdots\right)$$
$$= a$$

أو باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{1}$$
$$= a$$

ب)

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosx - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1 - x^2/2 + x^4/24 - \cdots) - 1}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + \cdots\right)$$
$$= 0$$

أو باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosx - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-sinx}{1} = 0$$

ج)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2cosx + xsinx - 2}{x^4}$$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{2(1 - x^2/2 + x^4/24 - \cdots) + x(x - x^3/6 + \cdots) - 2}{x^4}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12} + O(x^2)\right)$$
$$= -\frac{1}{12}$$

الرمز $O(x^2)$ (من درجة x^2) يعني أن الحدود المحذوفة تحتوي على حدود من الدرجة الثانية فأكثر.

أو بتطبيق قاعدة لوبيتال ثلاث مرات :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2cosx + xsinx - 2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-sinx + xcosx}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-xsinx}{12x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-sinx}{12x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-cosx}{12}$$

$$= -\frac{1}{12}$$

(٦,٦) إذا علمت أن للمعادلة $x^3 + 3x^2 + 6x - 3 = 0$ جذراً حقيقياً واحداً فقط فجد هذا الجذر مقرباً لخمس مراتب عشرية باستخدام طريقة نيوتن ورافسون.

الحل :

نفرض أن $f(x) = 3x^2 + 3x^2 + 6x - 3$. عندئذ ، $f'(x) = x^3 + 6x + 6$

إذا كان $f(x_n) \approx 0$ فإن التقريب الأفضل لحل المعادلة $f(x) = 0$ هو x_{n+1} الذي يحقق :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 3x_n^2 + 6x_n - 3}{3x_n^2 + 6x_n + 6}$$

نبدأ بوضع $x_o = 0$ ، $f(x_o) = -3.000$

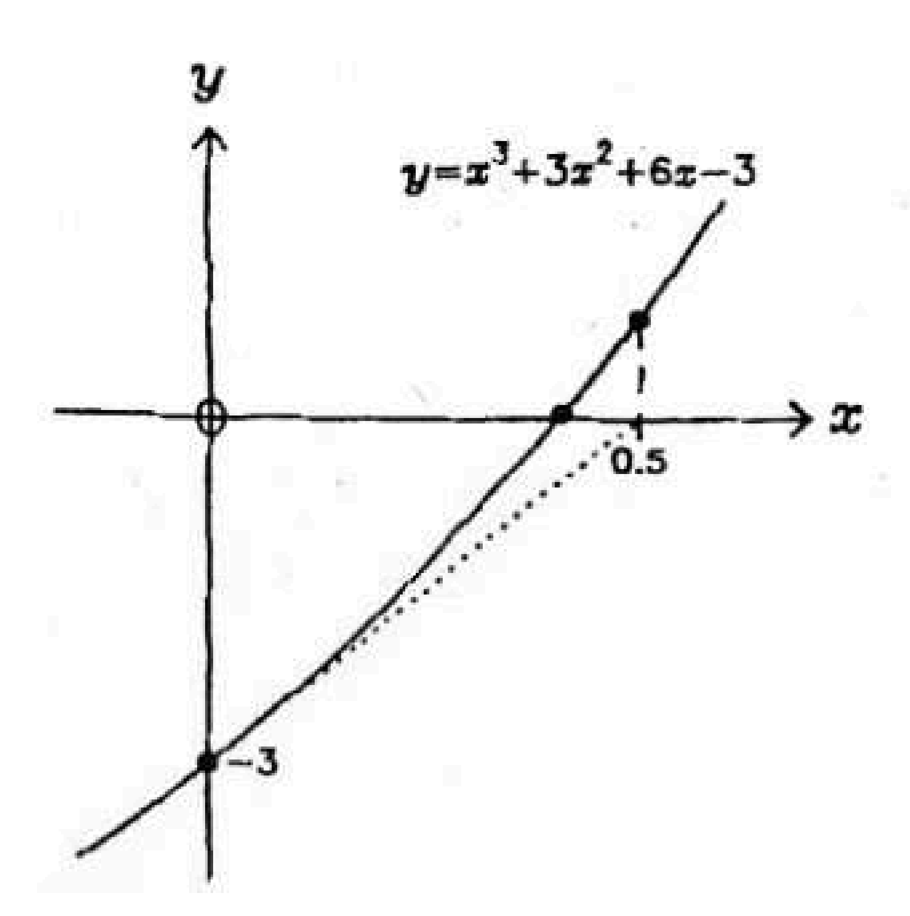
$x_1 = 0.5$ ، $f(x_1) = 0.875$

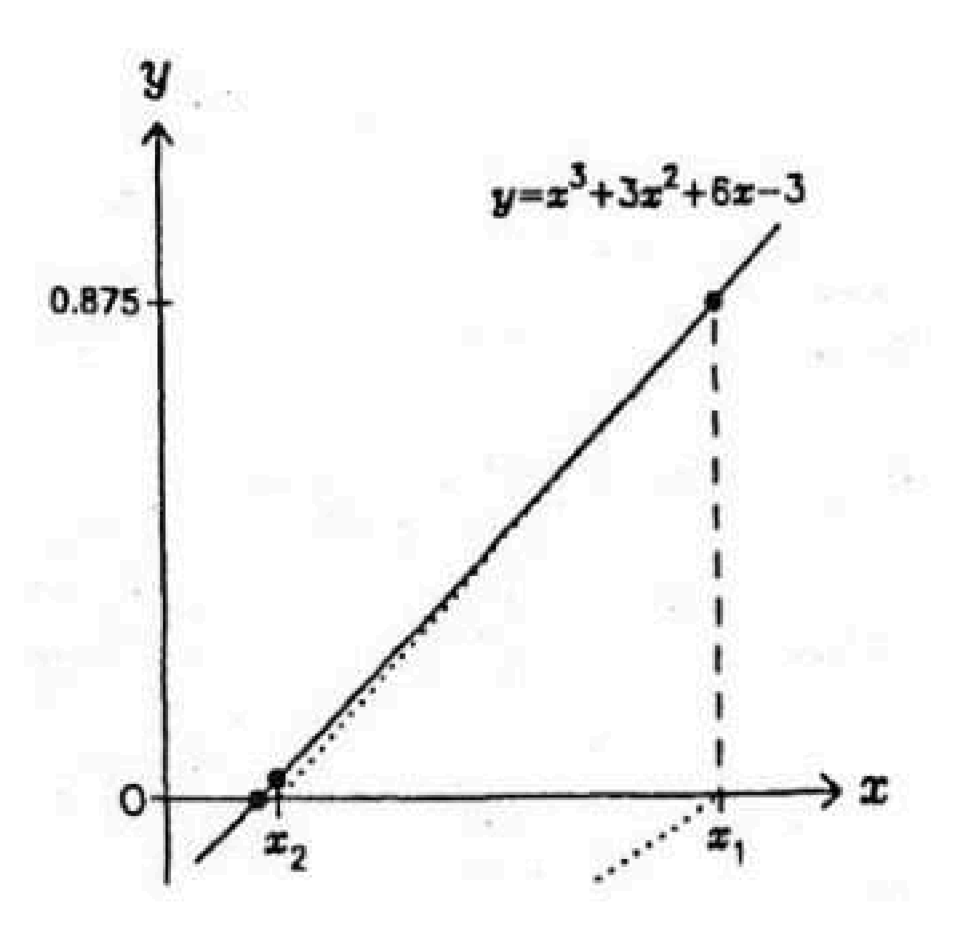
$x_2 = 0.4102564$ ، $f(x_2) = 0.03552$

$x_3 = 0.4062950$ ، $f(x_3) = 0.00006633$

$x_4 = 0.4062876$ ، $f(x_4) = 0$

أي أن $^3 + 3x^2 + 6x - 3 = 0$ عندما يكون $x = 0.40629$ (مقرباً لخمس مراتب عشرية).





الفصل السابع

الأعداد المركبة
COMPLEX NUMBERS

(٧،١) إذا كان $u = 2 + 3i$ و $v = 1 - i$ فجد المركبتين الحقيقية والتخيلية لكلٍ مما يلي

أ) $u + v$ ب) $u - v$

ج) uv د) u/v

هـ) v/u

الحل :

أ) $u + v = 2 + 1 + i(3 - 1) = 3 + 2i$

ب) $u - v = 2 - 1 + i(3 + 1) = 1 + 4i$

ج) $$uv = (2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 5 + i$$

د) $$\frac{u}{v} = \frac{2 + 3i}{1 - i} = \left(\frac{2 + 3i}{1 - i}\right) \times \left(\frac{1 + i}{1 + i}\right) = \frac{2 + 2i + 3i + 3i^2}{1 + i - i - i^2} = \frac{-1 + 5i}{2}$$

هـ) $$\frac{v}{u}=\left(\frac{1-i}{2+3i}\right)\times\left(\frac{2-3i}{2-3i}\right)=\frac{2-3i-2i+3i^2}{4+9}=\frac{-1-5i}{13}$$

أو

$$\frac{v}{u}=\frac{1}{u/v}=\left(\frac{2}{-1+5i}\right)\times\left(\frac{-1-5i}{-1+5i}\right)=\frac{2-10i}{1+25}=\frac{-1-5i}{13}$$

(٧,٢) إذا كانت u و v كما في التمرين السابق فجد كلاً من :

أ) $|u|$ ب) $|v|$

ج) $|uv|$ د) $|u/v|$

هـ) $|v/u|$

الحل :

أ) $$|u|^2=uu^*=(2+3i)(2-3i)=4+9$$

إذن ، $|u|=\sqrt{13}$.

ب) $$|v|^2=vv^*=(1-i)(1+i)=1+1$$

إذن ، $|v|=\sqrt{2}$.

ج) $$|uv|^2=(uv)(uv)^*=(5+i)(5-i)=25+1$$

إذن ، $|uv|=\sqrt{26}$.

من الممكن تعميم ذلك بإثبات أن $|uv| = |u||v|$ لأي عددين مركبين.
ولرؤية ذلك، لاحظ أن $(uv)^* = u^*v^*$ ومن ثم فإن:

$$|uv|^2 = (uu)^*(vv)^* = |u|^2|v|^2$$

د) $$\left|\frac{u}{v}\right|^2 = \left(\frac{u}{v}\right)\left(\frac{u}{v}\right)^* = \left(\frac{-1+5i}{2}\right)\left(\frac{-1-5i}{2}\right) = \frac{1+25}{4}$$

إذن، $\left|\frac{u}{v}\right| = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

وهذا يبين مرة أخرى أن مقياس خارج القسمة يساوي خارج قسمة المقياسين ويمكن إثبات ذلك بملاحظة أن:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^* = \frac{u^*}{v^*}$$

لكل u و v.

هـ) $$\left|\frac{v}{u}\right|^2 = \left(\frac{v}{u}\right)\left(\frac{v}{u}\right)^* = \left(\frac{-1-5i}{13}\right)\left(\frac{-1+5i}{13}\right) = \frac{1+25}{169}$$

إذن، $\left|\frac{v}{u}\right| = \frac{2}{\sqrt{26}}$.

وهذا يبين أن $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ لأي عدد مركب z وفي حالتنا $|v/u| = 1/|u/v|$.

(٧,٣) إذا كان $z = 1 + i\sqrt{3}$ فارسم كلاً مما يلي على مخطط أرجاند: z، z^*، z^2، z^3، iz، $\frac{1}{z}$

الحل:

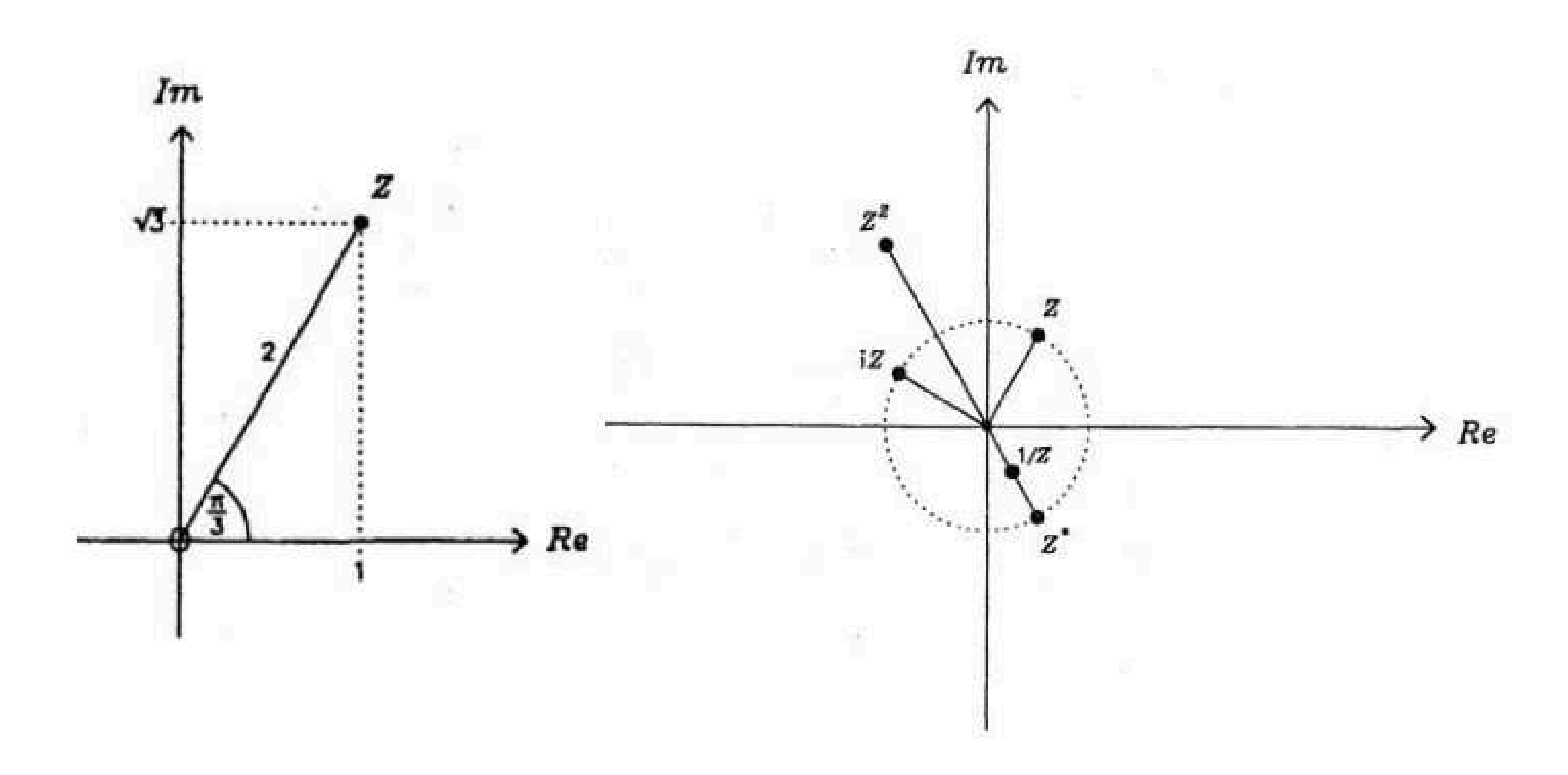
$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$$

أي أن مقياس z يساوي 2 والإزاحة الزاوية هي 60°.

إذن ،

$z^3 = 8e^{i\pi} = -8$ ، $z^2 = 4e^{i2\pi/3}$ ، $z^* = 2e^{-i\pi/3}$ ، $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}e^{-i\pi/3}$ ،

$iz = e^{i\pi/2}2e^{i\pi/3} = 2e^{i(\pi/3+\pi/2)}$.



(٧,٤) حل المعادلة $z^2 - z + 1 = 0$.

الحل :

لاحظ أولاً أنه إذا كان $z^2 + bz + c = 0$ فإن :

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$. وبهذا يكون :

$$z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow a = 1, \quad b = -1, \quad c = 1$$

إذن ، $$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$.

(٧,٥) حل المعادلات التالية :

أ) $z^5 = 1$ ب) $z^5 = 1 + i$

ج) $(z+1)^5 = 1$ د) $(z+1)^5 = z^5$

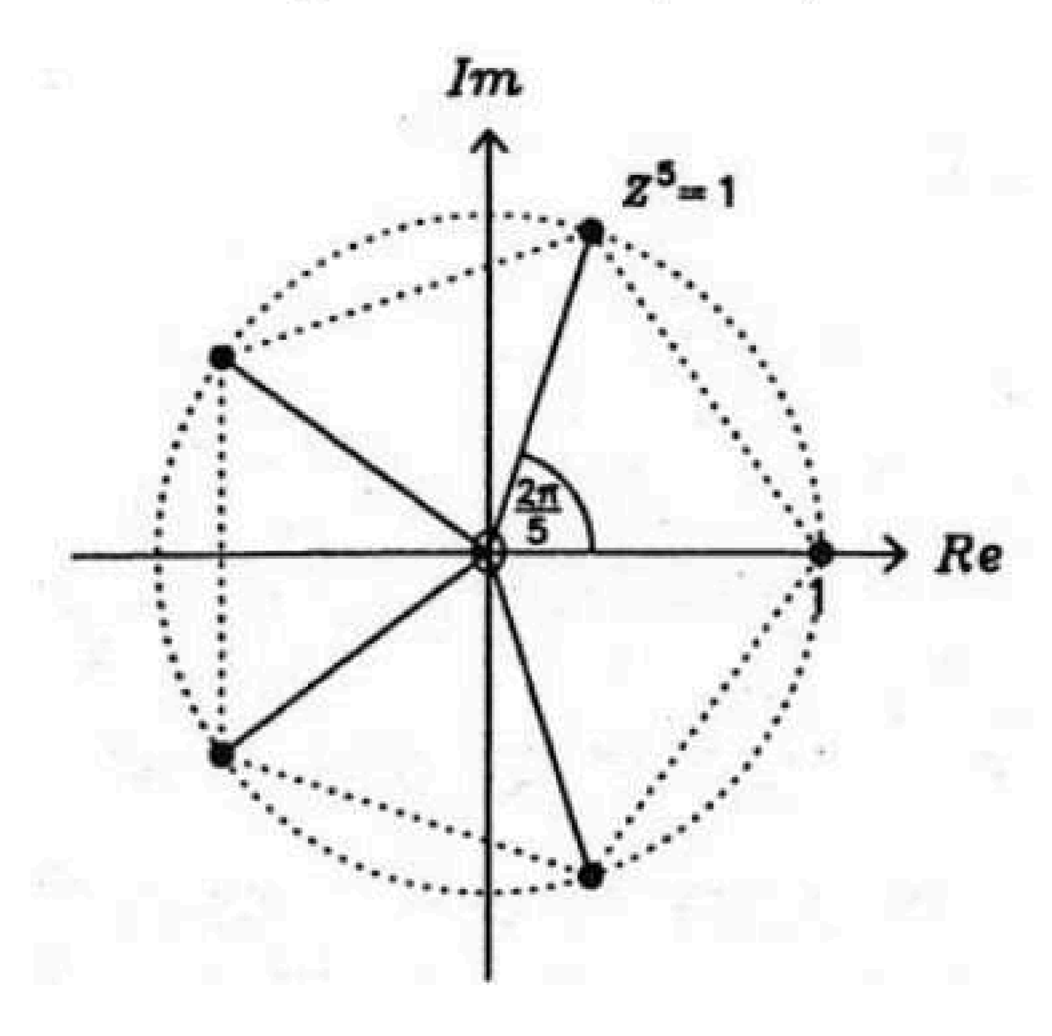
ارسم حلول الفقرة (أ) باستخدام مخطط أرجاند.

الحل :

أ) لاحظ أن $z^5 = 1 = e^{i2\pi n}$ حيث إن $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. من ذلك نستنتج أن $z = e^{i2\pi n/5}$ حيث إن $n = 0,1,2,3,4$.
على الرغم من أن النتيجة أعلاه صحيحة لجميع قيم n ، إلاّ أن عدد الحلول المختلفة يساوي5. إن اختيارنا لقيم n ليس وحيداً فمن الممكن أن نجد الحلول الخمســـــة المختلفة لو عوّضنا عن بالقيـــــم $0, \pm 1, \pm 2$. إن وجود خمسة حلول مختلفة هو أمر متوقع لأن عدد جذور أي كثيرة حدود من الدرجة يساوي وهذه الجذور إما أن تكون حقيقية أو مركبة ، وإذا كان الجذر مركباً فإن مرافقه جذر أيضاً. أي أن الجذور المركبة يجب أن يكون عددها عدداً زوجـــــياً (كما رأينا في التمرين ٧،٤).

ب) $z^5 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i(\pi/4 + 2\pi n)}$ حيث إن n عدد صحيح.

إذن ، $z = 2^{1/10}e^{i(\pi/4+2\pi n)/5} = 2^{1/10}e^{i\pi(1+8n)/20}$ حيث إن :
$n = 0,1,2,3,4$.



ج) $(z+1)^5 = 1 = e^{i2\pi n}$ حيث إن n عدد صحيح.

إذن ، $z+1 = e^{i2\pi n/5}$. أي أن $z = e^{i2\pi n/5} - 1$ حيث إن $n = 0, \pm 1, \pm 2$

د) بما أن $(z+1)^5 = z^5$ فإن $\left(\frac{z+1}{z}\right)^5 = 1 = e^{i2\pi n}$ حيث إن n عدد صحيح. ومنه فإن $\frac{z+1}{z} = e^{i2\pi/5}$. الآن :

$$\frac{z+1}{z} = e^{i2\pi n/5} \quad \Rightarrow z + 1 = ze^{i2\pi n/5}$$

$$\Rightarrow z\left(e^{i2\pi n/5} - 1\right) = 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{e^{i2\pi n/5} - 1}$$

$$\Rightarrow z = \frac{e^{-i2\pi n/5} - 1}{(e^{i2\pi n/5} - 1)(e^{-i2\pi n/5} - 1)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2[1 - cos\,(2\pi n/5)]}\left(e^{-i2\pi n/5} - 1\right)$$

حيث إن $n = 1,2,3,4$.

لاحظ أن $n \neq 0$. لأنه لو كان $n = 0$ فإن المقام $e^{i2\pi n/5} - 1 = 0$ وهذا غير ممكن.

إن وجود أربعة حلول فقط لهذه المعادلة يرجع إلى كون أنها معادلة من الدرجة الرابعة وليست من الدرجة الخامسة ومن الممكن رؤية ذلك بسهولة بفك المقدار $(z+1)^5$ ومساواته بالطرف الأيمن z^5 لنحصل على المعادلة
$5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1 = 0$

(٧,٦) استخدم e^{iA} و e^{iB} لإثبات صحة المتطابقين (٣,١٠) و(٣,١٣).

الحل :

نعلم أن $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ وأن $e^{i(A+B)} = e^{iA}e^{iB}$. الآن:

$$e^{i(A+B)} = e^{iA}e^{iB}$$
$$\Rightarrow cos(A+B) + isin(A+B) = (cosA + isinA)(cosB + isinB)$$
$$= cosAcosB - sinAsinB + i(sinAcosB + cosAcosB)$$

وبمساواة المركبة الحقيقية في الطرف الأيسر مع نظيرتها في الطرف الأيمن والمركبة التخيلية في الطرف الأيسر مع نظيرتها في الطرف الأيمن نجد أن:

$$cos\,(A+B) = cosAcosB - sinAsinB$$
$$sin\,(A+B) = sinAcosB + cosAcosB$$

(٧,٧) استخدم مبرهنة ديموفوار لكتابة كلٍ من $sin4\theta$ و $cos4\theta$ بدلالة قوى $sin\theta$ و $cos\theta$

الحل :

$$cos4\theta + isin4\theta = (cos\theta + isin\theta)^4$$

$$= cos^4\theta + 4icos^3\theta sin\theta + 6i^2cos^2\theta sin^2\theta + 4i^3cos\theta sin^3\theta + i^4sin^4\theta$$

$$= cos^4\theta - 6cos^2\theta sin^2\theta + sin^4\theta + i[4cos^3\theta sin\theta - 4cos\theta sin^3\theta]$$

وبمقارنة طرفي المعادلة نجد أن :

$$cos4\theta = cos^4\theta - 6cos^2\theta sin^2\theta + sin^4\theta$$

$$sin4\theta = 4cos^3\theta sin\theta - 4cos\theta sin^3\theta$$

إن هذا الاستخدام لمبرهنة ديموفوار للتعبير عن $cos4\theta$ و $sin4\theta$ بدلالة قوى $sin\theta$ و $cos\theta$ أسهل من استخدام صيغة ضعف الزاوية للدالتين $sin2\theta$ و $cos2\theta$.

(٧,٨) أثبت أن $cos^6\theta = (cos6\theta + 6cos4\theta + 15cos2\theta + 10)/32$

الحل :

$$cos^6\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^6$$

$$= \frac{e^{i6\theta} + 6e^{-i4\theta} + 15e^{i2\theta} + 20 + 15e^{-i2\theta} + 6e^{-i4\theta} + e^{-i6\theta}}{2^6}$$

$$= \frac{1}{32}\left[\frac{\left(e^{i6\theta} + e^{-i6\theta}\right)}{2} + 6\frac{\left(e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}\right)}{2} + 15\frac{\left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}\right)}{2} + \frac{20}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{32}(cos6\theta + 6cos4\theta + 15cos2\theta + 10)$$

(٧،٩) استخدم تعريف الدوال الزائدية لإثبات أن :

$$sinh(x + y) = sinhxcoshy + coshxsinhy$$

ثم جد صيغة مشابهة للدالة $cosh\ (x + y)$

الحل :

بما أن $cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$ وأن $sinh\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$ فإن :

$$sinhxcoshy + coshxsinhy$$

$$= \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

$$= sinh\ (x + y)$$

وبالمثل ،

$$cosh\ (x + y)$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2}$$

$$= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-x-y} + e^{-x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{x-y}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4}$$

$$= \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)$$

$$= coshxcoshy + sinhxsinhy$$

(٧,١٠) احسب كلاً من :

أ) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{cosk\theta}{k!}$

ب) $\int e^{ax} \sin(bx)\, dx$

الحل :

أ)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{cosk\theta}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{R}e\{e^{ik\theta}\}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{R}e\left\{\frac{e^{ik\theta}}{k!}\right\}$$

$$= \mathcal{R}e\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(e^{i\theta}\right)^{k}}{k!}\right\}$$

ولكن

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi^{k}}{k!} = 1 + \Phi + \frac{\Phi^{2}}{2!} + \frac{\Phi^{3}}{3!} + \cdots = exp\ (\Phi)$$

إذن ،

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{cosk\theta}{k!} = \mathcal{R}e\{exp\ (e^{i\theta})\}$$

$$= \mathcal{R}e\{exp\ (cos\theta + isin\theta)\}$$

$$= \mathcal{R}e\{exp\ (e^{cos\theta} e^{isin\theta})\}$$

وبهذا يكون:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{cosk\theta}{k!} = \mathcal{R}e\{e^{cos\theta}[cos(sin\theta) + isin(sin\theta)]\}$$
$$= e^{cos\theta}cos\ (sin\theta)$$

لاحظ أنه يمكن الحصول على المجموع المرادف للدالة $sink\theta/k!$ من $k = 0$ إلى $k = \infty$ من السطر ما قبل الأخير وهذا المجموع يساوي $e^{cos\theta}sin\ (sin\theta)$ ذلك لأن خطوات الحل متشابهة ما عدا استبدال الجزء الحقيقي $\mathcal{R}e\{\}$ بالجزء التخيلي $Im\{\}$.

ب)
$$\int e^{ax}\,sin(bx)\,dx = \int e^{ax}\,Im\{e^{ibx}\}dx$$
$$= \int Im\{e^{ax}e^{ibx}\}\,dx$$
$$= Im\left\{\int e^{x(a+ib)}\,dx\right\}$$
$$= Im\left\{\frac{e^{x(a+ib)}}{a+ib} + C\right\}$$

لكن
$$\frac{1}{a+ib} = \left(\frac{1}{a+ib}\right)\times\left(\frac{a-ib}{a-ib}\right) = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

إذن،
$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = Im\left\{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a-ib)(cosbx + isinbx) + C\right\}$$
$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(asinbx - bcosbx) + K$$

مرة أخرى نستطيع حساب تكامل الدالة $e^{ax}cos\ (bx)$ من السطر ما قبل الأخير باستبدال الجزء التخيلي $Im\{\}$ بالجزء الحقيقي $\mathcal{R}e\{\}$. وبهذا نكون قد حسبنا تكاملين دون إضافة جهد جديد. من الممكن حساب هذا التكامل أيضاً باستخدام طريقة التكامل بالأجزاء (مرتان) ولكن طريقتنا السابقة أسهل لأننا احتجنا فقط لحساب تكامل أُسي واحد. لاحظ أيضاً أن الثوابت K, b, a جميعهاحقيقية.

الفصل الثامن

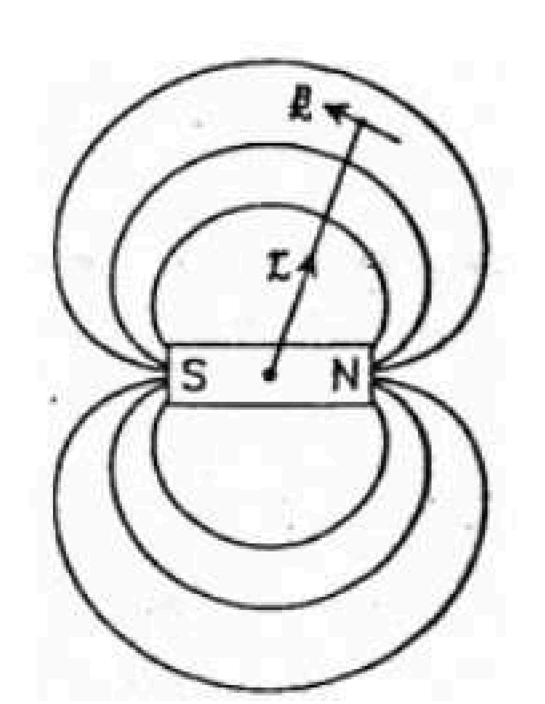
المتجهات
VECTORS

(٨,١) بيّن أياً من الكميات التالية هي كمية متجهة
أ) درجة الحرارة ب) المجال المغناطيسي
ج) التسارع د) القوة
هـ) الوزن الجزيئي و) المساحة

الحل :

أ) درجة الحرارة كمية قياسية (غير متجهة) لأن التعبير "اتجاه درجة الحرارة" ليس له معنى. لاحظ أن درجة الحرارة تتغير مع تغير المكان وهذا يعتبر متجهاً. فمثلاً ، إذا رفعنا درجة حرارة مكعب معدني عند أحد زواياه وخفضنا درجة حرارة الزاوية المقابلة فينتج عن ذلك توزيع حراري $T(r)$ وهي دالة قياسية في متجه الموقع r.

ب) المجال المغناطيسي كمية متجهة ومن الممكن استخدام البوصلة لتحديد اتجاهه عند أي نقطة. وفي العموم فهو دالة متجهة تعتمد على الموقع وتُكتب $B(r)$. الشكل أدناه يبين قضيباً مغناطيسياً يبين أن اتجاه وقيمة المجال المغناطيسي هما دالتان يعتمدان على متجه الموقع .



$$a = \frac{d}{dt}(V) = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}(r) = \ddot{r}$$

$$F = \frac{d}{dt}(mV) = m\frac{d}{dt}(V) = ma$$

ج) و (د) التسارع هو معدل تغير السرعة بالنسبة إلى الزمن والسرعة هي معدل تغير المسافة بالنسبة إلى الزمن. وبما أن المسافة يعبر عنها بمتجه موقع فنجد أن السرعة $v = dr/dt$ والتسارع $a = dv/dt$ هما كميتان متجهتان.

$$a = \frac{d}{dt}(v) = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}(r) = \ddot{r}$$

ينص قانون الحركة الثاني لنيوتن على أن القوة F تساوي معدل تغير العزم بالنسبة للزمن ويعرّف العزم على أنه حاصل ضرب الكتلة m (وهي كمية قياسية) مع السرعة $\dot{r}$ (وهي كمية متجهة). إذا كانت كتلة جسم ثابتة فإن قانون الحركة الثاني لنيوتن يأخذ العلاقة المشهورة التي تدرس في مادة فيزياء المرحلة الثانوية وهي $F = ma$ حيث إن F و a متجهان وm ثابت.

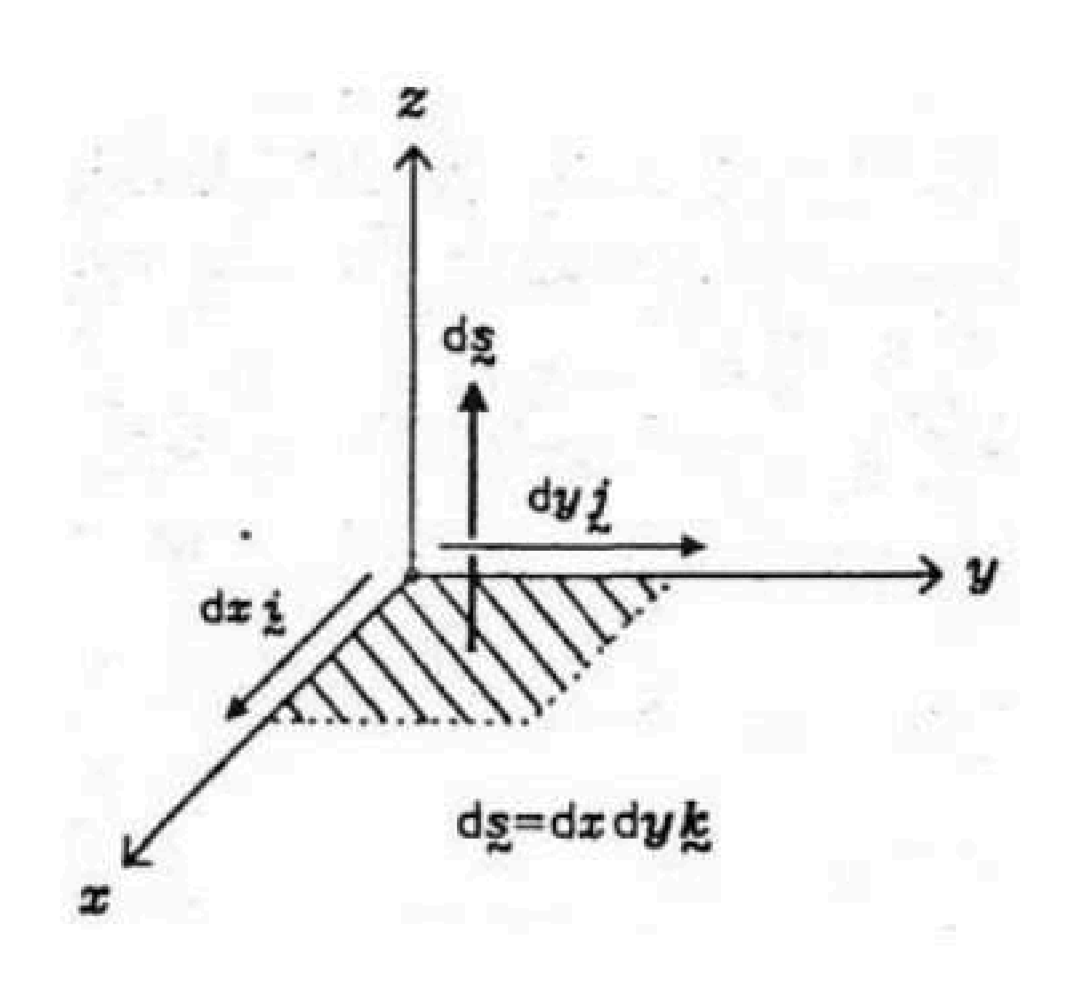
$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{d}{dt}(v) = ma$$

هـ) الوزن الجزيئي كمية قياسية وهو مجموع الأوزان الذرية لذرات الجزيئي وكل من هذه الأوزان هو وزن الذرة بالنسبة إلى $\frac{1}{12}$ من كتلة ذرة C_6^{12}.

في العديد من مجالات العلوم يستخدم مفهوم الوزن على أنه كمية متجهة، فمثلاً، وزن سيدة كتلتها m هو القوة التي تبذلها السيدة على ميزان. ونرى من قانون نيوتن أن هذا الوزن يساوي mg حيث إن هو متجه التسارع الناتج عن الجاذبية الأرضية والموجه باتجاه مركز الكرة الأرضية.

و) على عكس ماهو متوقع فإن المساحة يمكن اعتبارها كمية متجهة. على سبيل المثال، إذا كان a و b هما طول ضلعي سطح مائدة مستطيلة فإن كمية المساحة تساوي ab واتجاهها هو اتجاه العمودي على السطح. وبما أن معظم السطوح تأخذ أشكالاً غير منتظمة فإنه لإيجاد مساحتها نعتبر أجزاء صغيرة منها على أنها مستطيلة ومن ثم تكون مساحة السطح تساوي مجموع جميع مساحات الأجزاء الصغيرة المكون منها السطح وهي $s = \int ds$.

$$ds = dxdyk$$



(٨,٢) لنفرض أن متجه الموقع لكل من النقاط الأربـــع A ، B، C، D هو

$a = (1,2,3)$، $b = (2,0,1)$، $c = (1,1,1)$، $d = (5,2,5)$

على التوالي.

احسب كلاً مما يلي :

أ) $a + b - c - d$

ب) $2a - 3b - 5c + \frac{1}{2}d$

ج) منتصف كل من $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD}$.

الحل :

أ)
$$a + b - c - d = (1 + 2 - 1 - 5, 2 + 0 - 1 - 2\,, 3 + 1 - 1 - 5) = (-3, -1, -2)$$

ب)
$$2a - 3b - 5c + \frac{1}{2}d = (2(1) - 3(2) - 5(1) + \frac{5}{2}, 2(2) - 3(0) - 5(1) + \frac{2}{2}, 2(3) - 3(1) - 5(1) + \frac{5}{2}) = (-\,13/2\,, 0, 1/2)$$

ج) نقطة منتصف $\overrightarrow{BC}$ هي :

$$b + \frac{1}{2}(c - b) = \frac{1}{2}(b + c) = \frac{1}{2}(3,1,2)$$

نقطة منتصف $\overrightarrow{AD}$ هي :

$$\frac{1}{2}(a + d) = \frac{1}{2}(6,4,8) = (3,2,4)$$

(٨،٣) إذا كانـت a ، b ، c ، d هـي المتجهـات المبينـة في التمـرين (٨،٣) فاحسب:

أ) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطتين A و C .

ب) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بنقطتي منتصفي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$.

ج) المعادلات الديكارتية للمستقيمين $r = a + \lambda b$ و $r = c + \lambda d$.

الحل :

أ) لإيجاد المعادلة المتجهة للمستقيم نحتاج لمتجه من نقطة الأصل إلى نقطة على المستقيم ولتكن A ومن ثم نحتاج إلى متجه باتجاه $\overrightarrow{Ac} = c - a$. وعليه تكون المعادلة المتجهة للمستقيم هي:

$$\begin{aligned} r &= a + \lambda(c - a) \\ &= (1,2,3) + \lambda(1 - 1,1 - 2,1 - 3) \\ &= (1,2,3) + \lambda(0,1,2) \end{aligned}$$

ب) نقطة منتصف $\overrightarrow{AB}$ هي :

$$e = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(3,2,4)$$

نقطة منتصف $\overrightarrow{CD}$ هي:

$$f = \frac{1}{2}(c + d) = \frac{1}{2}(6,3,6)$$

المعادلة المتجهة للمستقيم هي:

$$r = e + \lambda(f - e) = \frac{1}{2}(3,2,4) + \frac{1}{2}\lambda(3,1,2)$$

ج) بما أن $r = a +$ فإن :

$$(x, y, z) = (1 + 2\lambda, 2, 3 + \lambda)$$

وتكون المعادلات الديكارتية للمستقيم هي :

$$\lambda = \frac{x-1}{2} = z - 3 \quad \text{و} \quad y = 2 \ .$$

وبما أن $r = c + \lambda d$ فإن :

$$(x, y, z) = (1 + 5\lambda, 1 + 2\lambda, 1 + 5\lambda)$$

وتكون المعادلات الديكارتية للمستقيم هي :

$$\lambda = \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{5} \ .$$

(٨,٤) إذا كانت a ، b ، c ، d كما في التمرين (٨,٢) فجد ما يلي :

أ) $a \cdot b$ ، $a \cdot c$ ، $a \cdot d$.

ب) الزاوية بين b و c والزاوية بين c و d .

ج) $(a \cdot c)b$ و $(a \cdot b)c$.

الحل :

أ)

$$a \cdot b = (1,2,3) \cdot (2,0,1) = 1 \times 2 + 2 \times 0 + 3 \times 1 = 5$$

$$a \cdot c = (1,2,3) \cdot (1,1,1) = 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 = 6$$

$$a \cdot d = (1,2,3) \cdot (5,2,5) = 1 \times 5 + 2 \times 2 + 3 \times 5 = 24$$

ب)

$$cos(\widehat{BOC}) = \frac{b \cdot c}{|b||c|} = \frac{2 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{3}}$$

إذن ، $\widehat{BOC} = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 39.2^{\circ}$.

$$\widehat{COD} = cos^{-1}\frac{c \cdot d}{|c||d|} = cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{3}\sqrt{54}}\right) = cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{8}{9}}\right) = 19.5^{\circ}$$

ج)
$$(a \cdot c)b = 6(2,0,1) = (12,0,6)$$
$$(a \cdot b)c = 5(1,1,1) = (5,5,5)$$

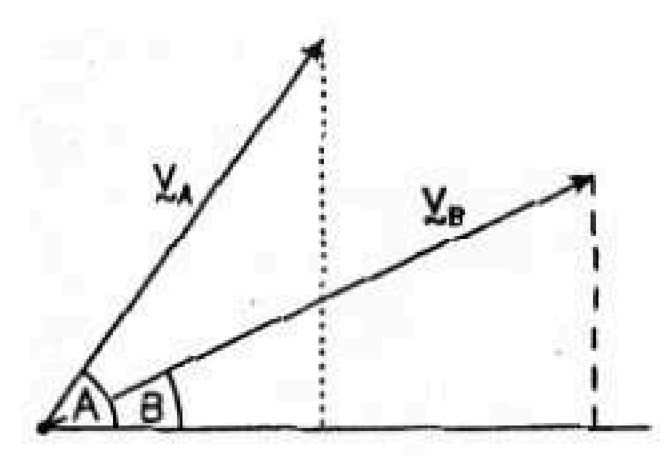
نُذَّكر القارئ أن الكميات مثل $(a \cdot c)b$ هي كميات متجهة.

(٨,٥) استخدم الضرب القياسي لإثبات أن:

$$\cos(A \pm B) = cosAcosB \pm sinAsinB$$

الحل :

نفرض أن v_A و v_B متجهان في المستوى xy وأن A و B هما الزاويتـان اللتـان يكوناهما مع محور x على التوالي (كما هو مبين في الشكل أدناه). عندئذ :



$$v_B = |v_B|\ (cosB, sinB, 0) \quad \text{و} \quad v_A = |v_A|(cosA, sinA, 0)$$

ومن ذلك نجد أن: $v_A \cdot v_B = |v_A||v_B|\cos\,(A - B)$.

ومن ناحية أخرى: $v_A \cdot v_B = |v_A||v_B|(cosAcosB + sinAsinB + 0)$.

وبهذا يكون :

$$cos(A - B) = cosAcosB + sinAsinB$$

وبوضع $B = -C$ نجد أن :

$$cos(A + C) = cosAcosC - sinAsinC$$

(لاحظ أن $sin(-\theta) = -sin\theta$).

(٨،٦) إذا كانت ، b ، c ، d كما في التمرين (٨،٢) فجد كلاً ما يلي :

أ) $a \times b$ ، $\times c$ ، $a \times d$.

ب) الزاوية بين b و c والزاوية بين c و d .

ج) اكتب معادلة كلٍ من المستقيمين في التمرين (٨،٣) الفقرة (ج) على الصورة $r \times p = q$.

الحل :

أ)

$$\begin{aligned} a \times b &= (1,2,3) \times (2,0,1) \\ &= (2 \times 1 - 3 \times 0, 3 \times 2 - 1 \times 1, 1 \times 0 - 2 \times 2) \\ &= (2,5,-4) \\ a \times c &= (1,2,3) \times (1,1,1) \\ &= (2 \times 1 - 3 \times 1, 3 \times 1 - 1 \times 1, 1 \times 1 - 2 \times 1) \\ &= (-1,2,-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \times b &= (1,2,3) \times (5,2,5) \\ &= (2 \times 5 - 3 \times 2, 3 \times 5 - 1 \times 5, 1 \times 2 - 2 \times 5) \\ &= (4,10,-8) \end{aligned}$$

ب)

$$sin(\widehat{BOC}) = \frac{|b \times c|}{|b||c|} = \frac{|(-1,-1,2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}\sqrt{3}}$$

إذن ، $(\widehat{BOC}) = sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = 39.2^{\circ}$.

وهذا يتفق مع ما وجدناه في التمرين (٨،٤).

$$(\widehat{COD}) = sin^{-1}\left(\frac{|c \times d|}{|c||d|}\right) = sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}\sqrt{54}}\right) = sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 19.5^{\circ}.$$

ج) بما أن الضرب المتجهي لأي متجه b مع نفسه يساوي صفراً $(b \times b = 0)$ فمن الممكن كتابة المعادلة $r = a + \lambda b$ على الصورة المطلوبة بضرب طرفيها بالمتجه b لنحصل على $r \times b = a \times b + \lambda b \times b = a \times b$ وبهذا يكون $r \times (2,0,1) = (2,5,-4)$.

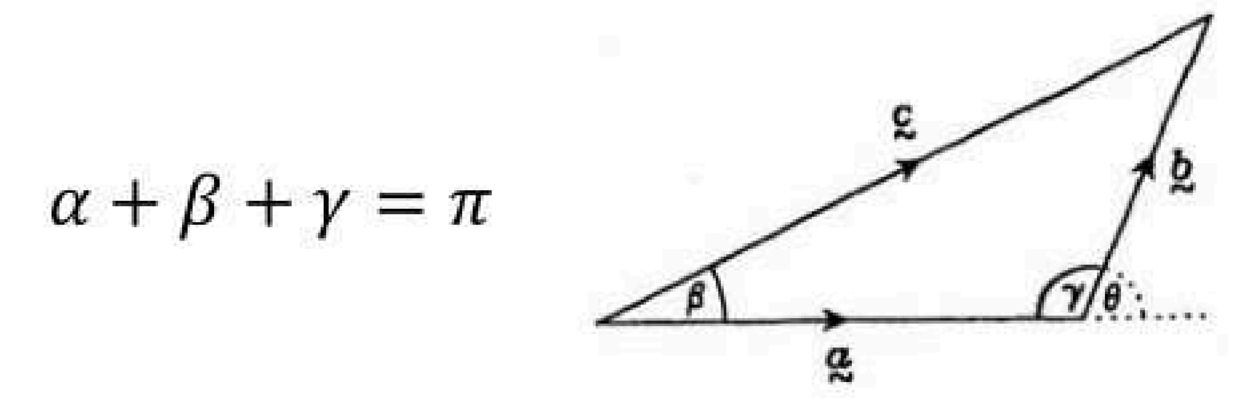
وبالمثل ، $r \times d = c \times d$. أي أن: $r \times (5,2,5) = (3,0,-3)$.

(٨،٧) استخدم الضرب المتجهي لإثبات قاعدة الجيب للمثلث.

الحل :

لنفرض أن المثلث منشأٌ من المتجهات a ، b ، c وأن $c = a + b$ (كما هو مبين في الشكل أدناه). عندئذ:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$



$$a \times c = a \times (a + b) = a \times a + a \times b = a \times b$$

لنفرض أن β هي الزاوية بين a و c (تقابل الضلع b) وأن θ الزاوية بين a و b.

وبهذا يكون :

$$a \times b = |a||b|sin\theta$$
$$a \times b = a \times c = |a||c|sin\beta$$

ومن ذلك نجد أن :

$$|b|sin\theta = |c|sin\beta$$

الآن ، بفرض أن γ هي الزاوية المقابلة للضلع c فإن $\gamma + \theta = \pi$ (أو 180°) وأن $sin\gamma = sin(\pi - \theta) = sin\theta$.

إذن ،
$$\frac{|b|}{sin\beta} = \frac{|c|}{sin\gamma}$$

وبالمثل، باستخدام $\times\, b$ نجد أن :

$$\frac{|a|}{sin \propto} = \frac{|c|}{sin\gamma}$$

(٨،٨) إذا كانت a ، b ، c ، d هي كما في التمرين (٨،٢) فاحسب :

أ) $a \cdot (b \times c)$ ، $a \cdot (c \times d)$ ، $a \cdot (b \times d)$.

ب) أي ثلاثة من متجهات الموضع الأربعة تقع في مستوى واحد ؟

ج) للمستوى في الفقرة (ب) ، جد المعادلة الديكارتية والمعادلة المتجهة ثم جد المسافة العمودية بينه وبين نقطة الأصل.

الحل :

أ)
$$a \cdot (b \times c) = (1,2,3) \cdot [(2,0,1) \times (1,1,1)]$$
$$= (1,2,3) \cdot (-1,-1,2) = 3$$

$$a \cdot (c \times d) = (1,2,3) \cdot [(1,1,1) \times (5,2,5)]$$
$$= (1,2,3) \cdot (3,0,-3) = -6$$
$$a \cdot (b \times d) = (1,2,3) \cdot [(2,0,1) \times (5,2,5)]$$
$$= (1,2,3) \cdot (-2,-5,4) = 0$$

ب) إذا كان الضرب الثلاثي القياسي لأي ثلاثة متجهات يساوي صفراً فإن حجم متوازي السطوح المنشأ بواسطة هذه المتجهات يساوي صفراً. وهذا يحدث فقط إذا كانت المتجهات تقع على مستقيم واحد أو مستوى واحد. ومن الفقرة (أ) وجدنا أن $a \cdot (b \times d) = 0$ وبهذا تكون المتجهات a، b، d في مستوى واحد.

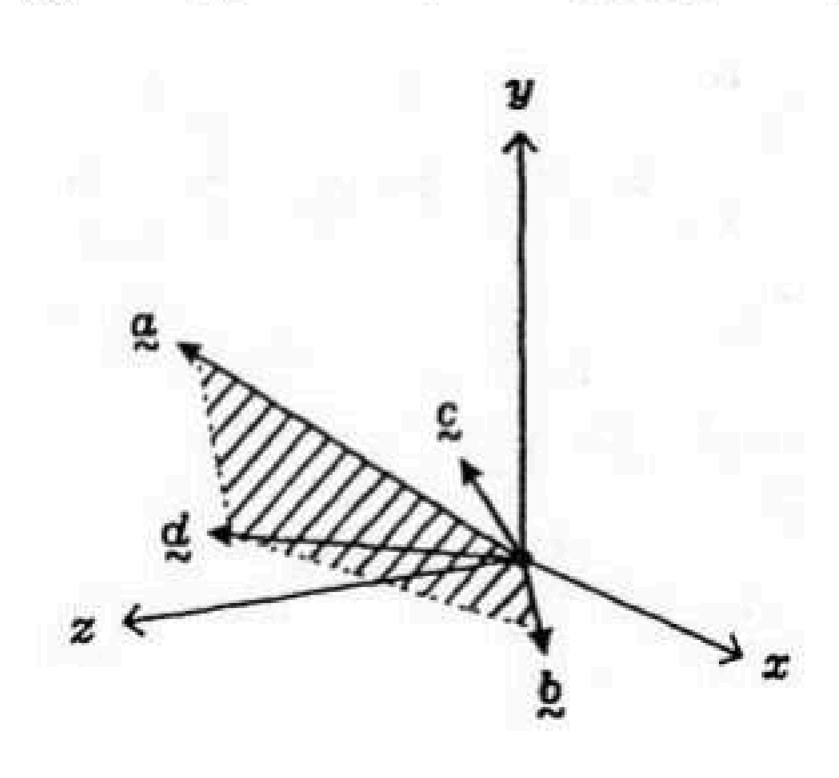
ج) المتجه العمودي n على المستوى هو الضرب المتجهي لأي متجهين في المستوى ، وليكن $a \times b$. ونرى أن:

$$n = a \times b = (2,5,-4)$$

إذن معادلة المستوى المتجهة هي:

$$r \cdot (2,5,-4) = d$$

حيث إن r نقطة في المستوى و d ثابت (انظر الشكل أدناه).



بأخذ $r = a$ (على سبيل المثال) نجد أن :

$$d = (1,2,3) \cdot (2,5,-4) = 0$$

وبهذا تكون المعادلة المتجهة للمستوى هي :

$$r \cdot (2,5,-4) = 0$$

أو $\quad (x, y, z) \cdot (2,5,-4) = 0$.

وأما المعادلة الديكارتية للمستوى فهي :

$$2x + 5y - 4z = 0$$

أما بالنسبة للمسافة العمودية بين المستوى ونقطة الأصل فهي تساوي صفراً لأنها تساوي الطرف الأيمن من معادلة المستوى المتجهة عندما يكون المتجه العمودي على المستوى هو متجه طوله 1. ويمكن أن نجد ذلك بقسمة طرفي المعادلة على المقدار $|(2,5,-4)|$ وهذا لا يغير من قيمة الطرف الأيمن للمعادلة المتجهة أعلاه.

(٨،٩) احسب الضرب الثلاثي القياسي للمتجهات $(1,2,4)$ ، $(2,0,-3)$ ، $(-4,4,17)$. هل هي مستقلة خطياً ؟ هل من الممكن كتابة المتجه الثالث كترتيب خطي للمتجهين الآخرين ؟ إذا كانت الإجابة بنعم فجد هذا التركيب الخطي.

الحل :

$$(1,2,4) \cdot [(2,0,-3) \times (-4,4,17)] = (1,2,4) \cdot (12,-22,8) = 0 .$$

وبما أن الضرب الثلاثي القياسي يساوي صفراً فإما أن تقع المتجهات على خط مستقيم واحد وإما أن تقع على مستوى واحد. وبهذا فإن المتجهات مرتبطة خطياً

(ليست مستقلة خطياً). وبما أن المتجهات ليست مضاعفات لبعضها بعضاً ومن ثم فهي ليست متوازية ونرى أنها تقع في مستوى واحد ومن ثم يكون بالإمكان كتابة المتجه الثالث كتركيب خطي للمتجهين الآخرين

$$(-4,4,17) = \alpha(1,2,4) + \beta(2,0,-3) \qquad (*)$$

حيث إن α و β ثابتان. وللحصول على قيمة كل من الثابتين α و β نضرب طرفي المعادلة قياسياً بمتجه عمودي على $(2,0,-3)$ وهو $(3,0,2)$ لنحصل على:

$$\begin{aligned}(-4,4,17)\cdot(3,0,2) &= \alpha(1,2,4)\cdot(3,0,2) + \beta(2,0,-3)\cdot(3,0,2)\\ \Rightarrow 22 &= 11\alpha + 0\end{aligned}$$

ونجد أن $\alpha = 2$. وبالتعويض عن قيمة α في المعادلة $(*)$ والحل نجد أن: $\beta = -3$.

إذن،

$$(-4,4,17) = 2(1,2,4) - 3(2,0,-3).$$

(٨,١٠) استخدم التمرين (٨,٤) للتحقق من صحة المتطابقة "$ABACAB$"

الحل :

$$\begin{aligned}a\times(b\times c) &= (1,2,3)\times[(2,0,1)\times(1,1,1)]\\ &= (1,2,3)\times(-1,-1,2) = (7,-5,1)\end{aligned}$$

$$(a\cdot c)b - (a\cdot b)c = 6(2,0,1) - 5(1,1,1)\ (7,-5,1)$$

ومن ثم فإن متطابقة "$ABACAB$"

$$\underbrace{a\times(b}_{AB}\times c) = \underbrace{(a\cdot c)}_{AC}\,b - \underbrace{(a\cdot b)}_{AB}\,c$$

محققة.

(٨,١١) تُعرّف مقلوبات المتجهات a ، b، c كالتالي :

$$c' = (a \times b)/s \text{ ،} b' = (c \times a)/s \text{ ،} a' = (b \times c)/s$$

حيث إن $s = a \cdot (b \times c)$.

أثبت أن $a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = 1$ وأن $a \cdot b' = a \cdot c' = 0$.

احسب الضرب الثلاثي القياسي للمقلوبات بدلالة s. إذا كان x تركيباً خطياً للمقلوبات فأثبت أن معامل a' هو $a \cdot x$

الحل :

بضرب المتجهات a ، b، c قياسياً بالمتجهات a'، b'، c' على التوالي نحصل على :

$$a \cdot a' = a \cdot (b \times c)/s = s/s = 1$$
$$b \cdot b' = b \cdot (c \times a)/s = s/s = 1$$
$$c \cdot c' = c \cdot (a \times b)/s = s/s = 1$$

(لاحظ أن $[a, b, c] = a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$).

كما أن :

$$a \cdot b' = a \cdot (c \times a)/s = 0$$
$$a \cdot c' = a \cdot (a \times b)/s = 0$$

وذلك لأن الضرب الثلاثي القياسي يحتوي على متجهين متساويين.

الضرب الثلاثي القياسي للمقلوبات هو :

$$\begin{aligned} a' \cdot (b' \times c') &= (b \times c) \cdot \big((c \times a) \times (a \times b)\big)/s^3 \\ &= (b \times c) \cdot ([b \cdot (c \times a)]a - [a \cdot (c \times a)]b)/s^3 \\ &= (b \times c) \cdot (sa - 0)/s^3 \\ &= a \cdot (b \times c)/s^3 \\ &= s/s^2 = 1/s \end{aligned}$$

وأخيراً ، إذا كان $x = \propto a' + \beta b' + \gamma c'$ فإن :

$$a \cdot x = \propto a \cdot a' + \beta a \cdot b' + \gamma a \cdot c' = \propto +0 + 0$$

إذن ، $\propto = a \cdot x$. وبالمثل، $\beta = b \cdot x$ و $\gamma = c \cdot x$.

تُستخدم مقلوبات المتجهات كثيراً في تبسيط مسائل علم البلوريات وفيزياء الجوامد.



الفصل التاسع

المصفوفات

MATRICES

(٩,١) جد $A+B$ ، $A-B$ ، AB ، BA حيث إن :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

تحقق من صحة :

$$det(AB) = det(A)\, det\,(B) \quad \text{و} \quad (AB)^T = A^T B^T$$

الحل :

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+3 \\ 1+0 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-3 & 1-3 \\ 1-0 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2\times 3 + 1\times 0 & 2\times 3 + 1\times 4 \\ 1\times 3 + 2\times 0 & 1\times 3 + 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3\times 2 + 3\times 1 & 3\times 1 + 3\times 2 \\ 0\times 2 + 4\times 1 & 0\times 1 + 4\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

يبين هذا المثال البسيط أن عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية في العموم ، أي أن $BA \neq AB$ حتى في الحالات التي يكون فيها كل من AB و BA معرّفاً.

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}^T = (AB)^T$$

$$det\,(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$$

$$det\,(B) = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 0 \times 3 = 12$$

$$.\,det\,(AB) = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 6 \times 11 - 3 \times 10 = 36 = det(A)\,det\,(B)$$

(٩،٢) بيّن كيفية استخدام محدد مصفوفة من الدرجة 3×3 في حساب كل من الضرب المتجهي والضرب الثلاثي القياسي

الحل :

نفرض أن a ، b ، c متجهات إحداثياتها هي :

$$a = (a_1, a_2, a_3) = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$b = (b_1, b_2, b_3) = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

$$c = (c_1, c_2, c_3) = c_1 i + c_2 j + c_3 k$$

حيث إن i ، j ، k متجهات وحدة في اتجاه المحاور x ، y ، z على التوالي.

عندئذ :

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - b_2a_3)i - (a_1b_3 - b_1a_3)j + (a_1b_2 - b_1a_2)k$$

$$= (a_2b_3 - b_2a_3, a_3b_1 - b_3a_1, a_1b_2 - b_1a_2) = a \times b$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - b_2a_3)c_1 - (a_3b_1 - b_3a_1)c_2 + (a_1b_2 - b_1a_2)c_3$$

$$= (a \times b)_1c_1 + (a \times b)_2c_2 + (a \times b)_3c_3 = (a \times b) \cdot c$$

من الممكن استخدام خواص المحددات للحصول على بعض خواص الضرب المتجهي والضرب الثلاثي القياسي فمثلاً :

١- $a \times b = -b \times a$ لأنه عنداستبدال صفين (أو عمودين) في مصفوفة نضرب المحدد بالعدد -1 .

٢- إذا كان a موازياً للمتجه b فإن $a \times b = 0$ لأن قيمة المحدد الذي يحتوي على صفين متساويين تساوي صفراً.

٣- إذا كانت a ، b ، c مرتبطة خطياً (أي تقع على المستقيم نفسه أو المستوى نفسه) فإن $(a \times b) \cdot c = 0$ لأن الفرق بين أي صف وتركيب مناسب للصفين الآخرين ينتج عنه صفاً صفرياً.

(٩,٣) جد معكوس المصفوفة التالية :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

وتحقق من المساواة $CC^{-1} = C^{-1}C = I$

الحل :

$$adj(C)$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)\times(-1) - 2\times 1 & 1\times 1 - (-1)\times(-1) & (-1)\times 2 - 1\times(-1) \\ 2\times(-1) - 1\times(-1) & 2\times(-1) - 1\times(-1) & 1\times 1 - 2\times 2 \\ 1\times 1 - (-1)\times(-1) & (-1)\times(-1) - 2\times 1 & 2\times(-1) - (-1)\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$det\ (C) \ = det\ (C^T) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times(-1) + 1\times 0 + (-1)\times(-1) = -1$$

إذن ، $C^{-1} = \dfrac{adj(C)}{\det(C)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

وللتحقق من المساواة لاحظ أن :

$$CC^{-1} \quad = \begin{pmatrix} 2-1+0 & 0-1+1 & 2-3+1 \\ 1-1+0 & 0-1+2 & 1-3+2 \\ -1+1+0 & 0+1-1 & -1+3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$C^{-1}C = \begin{pmatrix} 2+0-1 & -1+0+1 & 1+0-1 \\ 2+1-3 & -1-1+3 & 1+2-3 \\ 0+1-1 & 0-1+1 & 0+2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

(٩,٤) أثبت أن القيم المميزة للمصفوفة الهرميتية جميعها حقيقية وأن المتجهات المميزة المقابلة لقيم مميزة مختلفة متعامدة.

الحل :

لنفرض أن x_j و x_k هما المتجهان المميزان المقابـــلان للقيمتين المميزتـــين λ_j و λ_k على التوالي للمصفوفة الهرميتية A. عندئذ :

$$Ax_j = \lambda_j x_j \qquad (١)$$

$$Ax_k = \lambda_k x_k \qquad (٢)$$

وبأخذ منقول المعادلة رقم (١) والمرافق المركب للمعادلة رقم (٢) نجد أن :

$$x_j{}^T A^T = \lambda_j x_j{}^T \qquad (٣)$$

$$A^* x_k{}^* = \lambda_k{}^* x_k{}^* \qquad (٤)$$

(لاحظ أن $(Ax)^T = x^T A^T$ وأن $\lambda^T = \lambda$).

بضرب المعادلة رقم (٣) بالمتجه x_k^* من اليمين وضرب المعادلة رقم (٤) بالمتجه x_j^T من اليسار نحصل على :

$$x_j^T A^T x_k^* = \lambda_j x_j^T x_k^* \qquad (٥)$$

$$x_j^T A^* x_k^* = \lambda_k^* x_j^T x_k^* \qquad (٦)$$

بطرح المعادلة رقم (٦) من المعادلة رقم (٥) نجد أن :

$$x_j^T A^T x_k^* - x_j^T A^* x_k^* = \lambda_j x_j^T x_k^* - \lambda_k^* x_j^T x_k^*$$

وبما أن $A^T = A^*$ (لأن A هرميتية) فنرى أن :

$$(\lambda_j - \lambda_k^*) x_j^T x_k^* = 0$$

بوضع $= j$ نجد أن $\lambda_j = \lambda_j^*$ (لأن $x_j^T x_j^* > 0$)

إذن ، القيم المميزة للمصفوفة الهرميتية هي قيم حقيقية.

وأخيراً ، إذا كان $j \neq k$ و $\lambda_j \neq \lambda_k$ فنجد أن :

$$x_j^T x_k^* = 0$$

وبهذا تكون المتجهات المميزة المقابلة لقيم مميزة مختلفة يجب أن تكون متعامدة.[١]

تُسمى الحالة التي يكون فيها $\lambda_j = \lambda_k$ حالة مضمحلة ، وفي هذه الحالة المتجهات المميزة المقابلة تقع في مستوى واحد. وبما أننا نستطيع الحصول على أي نقطة في المستوى كتركيب خطي لمتجهين أساسيين غير متوازيين في المستوى فنختار

---

(١) لاحظ أن $a^T b^*$ هو الضرب القياسي لمتجهين مركبين a و b ، فإذا كان $a = b$ فنجد $a^T a^* \geq 0$ لأن ذلك هو مربع معيار a. إذا كان $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $a \neq b$ فإنهما يكونان متعامدين إذا كان $a^T b^* = 0$.

المصفوفة حقيقية ومتماثلة فإن $A = A^*$ و $A^T = A$ ، ولذا فهي حالة خاصة من المصفوفة الهرمتية وعليه فإن النقاش السابق يبقى صحيحاً في هذه الحالة أيضاً.

(٩,٥) لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

أ) جد القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة A .

ب) تحقق من أن المتجهات المميزة متعامدة.

ج) تحقق من أن مجموع القيم المميزة يساوي أثر المصفوفة .

د) تحقق من أن حاصل ضرب القيم المميزة يساوي قيمة محدد المصفوفة .

هـ) جد مصفوفة الاستقصار باستخدام متجهات مميزة معيرة للمصفوفة

.

و) تحقق من صحة المساواة $OO^T = O^TO = I$.

ز) تحقق من أن تحويل التماثل $O^TAO = \Lambda$ هو بالفعل مصفوفة قطرية عناصر قطرها هي القيم المميزة للمصفوفة A.

الحل :

أ) القيم المميزة للمصفوفة A هي حلول المعادلة المميزة $det(A - \lambda I) = 0$.

الآن :

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1+\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1)$$

$$= \lambda(1+\lambda)(\lambda - 2)$$

إذن ، القيم المميزة هي $\lambda = 0$ ، $\lambda = -1$ ، $\lambda = 2$.

لإيجاد المتجهات المميزة المقابلة للقيم المميزة نقوم بحل المعادلة :

$$(A - \lambda I)X = 0$$

أي حل نظام المعادلات :

$$\begin{aligned} x + z &= \lambda x \\ -y &= \lambda y \\ x + z &= \lambda z \end{aligned}$$

لكل قيم λ.

عندما $\lambda = 0$ نحصل على النظام :

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

وبحل هذا النظام نجد أن المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda = 0$ هي :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}$ حيث إن t عدد حقيقي.

بوضع $t = 1$ نحصل على المتجه المميز $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ وبتعيير هذا المتجه نحصل على المتجه المميز المعير (طوله يساوي 1).

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

عندما $\lambda = -1$ نحصل على النظام:

$$\begin{aligned} 2x + z &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

ونرى بحل هذا النظام أن المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda = -1$ هي:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$ حيث إن t عدد حقيقي.

بوضع $t = 1$ نحصل على المتجه المميز المعير.

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

عندما $\lambda = 2$ نحصل على النظام:

$$\begin{aligned} -x + z &= 0 \\ -3y &= 0 \end{aligned}$$

وبحل النظام نجد أن المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda = 2$ هي:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$ حيث إن t عدد حقيقي.

وبوضع $t = 1$ والتعبير نحصل على المتجه المميز المعير:

$$X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

ب) بما أن :

$$X_1 \cdot X_2 = X_1^T X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \times 0 + 0 \times 1 + (-1) \times 0] = 0$$

$$X_1 \cdot X_3 = X_1^T X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \times 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$X_2 \cdot X_3 = X_2^T X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}[0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1] = 0$$

فنجد أن القيم المميزة متعامدة.

ج) $trace(A)$ (أثر A) هو مجموع عناصر قطر A. أي أن:

$$trace(A) = 1 - 1 + 1 = 1$$

مجموع القيم المميزة هو:

$$0 - 1 + 2 = 1$$

ومن ثم فهما متساويان.

د) حاصل ضرب القيم المميزة يساوي $0 \times (-1) \times 2 = 0$ أما محدد المصفوفة فهو:

$$det(A) = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\end{vmatrix} = -1 \times (1 - 1) = 0$$

ونرى أن حاصل ضرب القيم المميزة يساوي محدد المصفوفة.

هـ) مصفوفة الاستقطار هي :

$$O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و) لاحظ أن :

$$OO^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I$$

$$O^TO = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I$$

ونرى أن $O^T = O^TO = I$.

ز) لاحظ أن :

$$O^TA = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ولذا فإن :

$$O^TAO = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

أي أن :

$$O^T A O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

عند حسابنا للقيم والمتجهات المميزة لمصفوفة حقيقية متماثلة (أو هرميتية) يكون من المناسب التحقق من أن :

١- مجموع القيم المميزة يساوي أثر المصفوفة.

٢- المتجهات المميزة متعامدة.

٣- حاصل ضرب القيم المميزة يساوي محدد المصفوفة.

وإذا لم تتحقق أي من هذه الخواص فهذا يعني وجود خطأ في حساب القيم والمتجهات المميزة.

ويجب التأكد أيضاً من أن جميع القيم المميزة حقيقية.

الفصل العاشر

الاشتقاق الجزئي

PARTIAL DIFFERENTIATION

(١٠،١) استخدم المبادئ الأساسية لحساب الاشتقاق الجزئي $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ و $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ حيث إن $z(x, y) = \frac{x^3}{1-y}$.

احسب (بأي طريقة) كلاً من $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

ثم تحقق من صحة المساواة $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

الحل :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{z(x+\delta x, y) - z(x, y)}{\delta x}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{(x+\delta x)^3/(1-y) - x^3/(1-y)}{\delta x}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{x^3 + 3x^2\delta x + 3x\delta x^2 + \delta x^3 - x^3}{(1-y)\delta x}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{3x^2 + 3x\delta x + \delta x^2}{(1-y)}\right) = \frac{3x^2}{1-y}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = lim_{\delta y \to 0}\left(\frac{z(x,y+\delta y)-z(x,y)}{\delta y}\right)$$

$$= \lim_{\delta y \to 0}\left(\frac{x^3/(1-[y+\delta y])-x^3/(1-y)}{\delta y}\right)$$

$$= \lim_{\delta y \to 0}\left(\frac{x^3}{\delta y}\left[\frac{1}{(1-y-\delta y)}-\frac{1}{(1-y)}\right]\right)$$

$$= \lim_{\delta y \to 0}\left(\frac{x^3[(1-y)-(1-y-\delta y)]}{\delta y(1-y-\delta y)(1-y)}\right)$$

$$= \lim_{\delta y \to 0}\left(\frac{x^3}{(1-y-\delta y)(1-y)}\right) = \frac{x^3}{(1-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x_y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial}{\partial x_y}\left(\frac{3x^2}{1-y}\right) = \frac{6x}{1-y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y_x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial}{\partial y_x}\left(\frac{x^3}{(1-y)^2}\right) = \frac{2x^3}{(1-y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x_y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x_y}\left(\frac{x^3}{(1-y)^2}\right) = \frac{3x^2}{(1-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y_x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial}{\partial y_x}\left(\frac{3x^2}{1-y}\right) = \frac{3x^2}{(1-y)^2}$$

على الرغم من معرفتنا أن المشتقات الجزئية الثانية المختلفة تكون متساوية ، إلاّ أنه يكون من المناسب التحقق من ذلك.

(١٠,٢) إذا كانت $f(x,y,z) = cos\,(xyz)$ فاحسب $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ وذلك بتثبيت ملائم للمتغيرات.

الحل :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} = -xysin(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y_{xz}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} = -x^2yzcos(xyz) - xsin(xyz)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x_{yz}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)$$

$$= x^2y^2z^2\,sin(xyz) - 2xyzcos(xyz) - xyzcos(xyz) - sin\,(xyz)$$

$$= (x^2y^2z^2 - 1)\,sin(xyz) - 3xyzcos(xyz)$$

(١٠,٣) أثبت أن $x^2 = y^2 sin\,(yz)$ تحقق المعادلة :

$$(\partial x/\partial y)_z(\partial y/\partial z)_x(\partial z/\partial x)_y = -1$$

الحل :

$$x^2 = y^2 sin\,(yz) \qquad (١)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_z}\,(1) \Rightarrow 2x\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = y^2\,cos(yz)\frac{\partial}{\partial y_z}\,(yz) + 2ysin(yz)$$

إذن ، $$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{y^2z\,cos(yz) + 2ysin(yz)}{2x} \qquad (٢)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_x}(1) \Rightarrow 0 = y^2\cos(yz)\frac{\partial}{\partial z_x}(yz) + 2y\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x sin(yz)$$

$$= y^2\,cos(yz)\left[y + z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\right] + 2y\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x sin\,(yz)$$

إذن ، $$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \frac{-y^3cos\,(yz)}{y^2zcos(yz) + 2ysin(yz)} \qquad (٣)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_y}(1) \Rightarrow 2x = y^2\,cos(yz)\frac{\partial}{\partial x_y}(yz) = y^3cos\,(yz)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$$

إذن ، $$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{2x}{y^3cos\,(yz)} \qquad (٤)$$

من المعادلات (٢)، (٣) ، (٤) نخلص إلى أن :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

(١٠,٤) لتكن $f(x,y) = xy(1 - y + x)$.

أ) احسب متجه الميل ∇f عند النقاط $(-\frac{1}{2},0)$ و $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و$(0\frac{1}{2})$.

ب) جد النقاط الحرجة الواقعة داخل المثلث الذي رؤوسه $(-1,0)$ و$(0,0)$ و $(0,1)$.

ج) ارسم بيان الدالة داخل هذا المثلث وبيّن اتجاه ∇f عند النقاط المعطاة في الفقرة (أ) .

الحل :

أ)
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial}{\partial x_y}(xy - xy^2 + x^2y) = y(1 - y + 2x)$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial}{\partial y_x}(xy - xy^2 + x^2y) = x(1 - 2y + x)$$

إذن ، $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y(1 - y + 2x), x(1 - 2y + x))$.

وأخيراً :

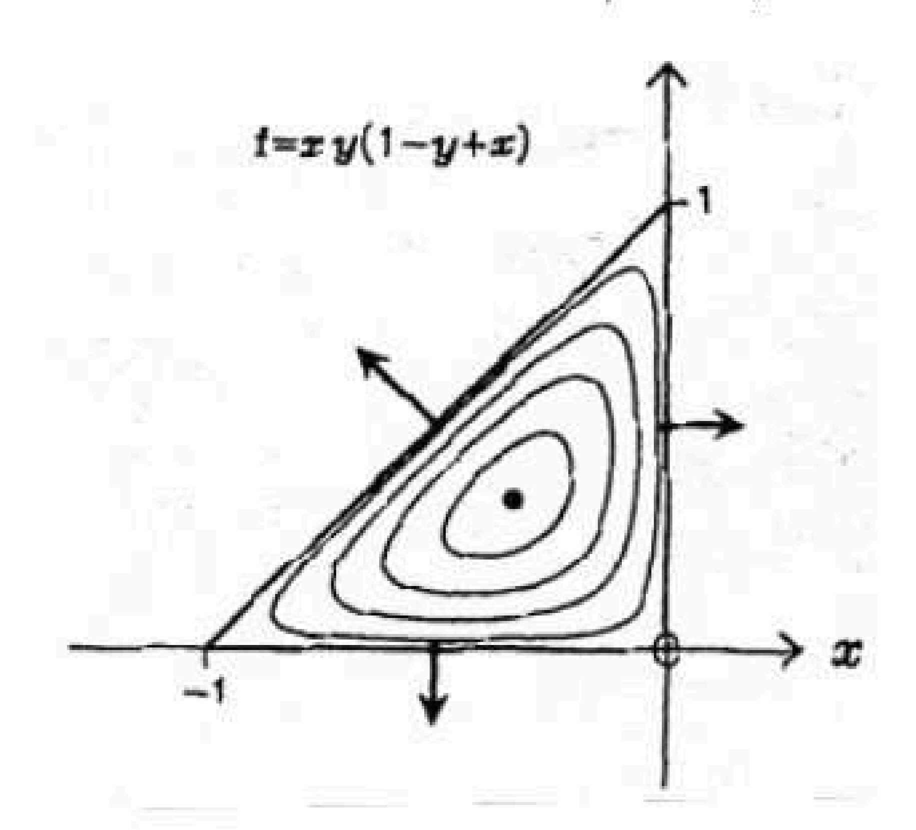
$$\nabla f(-\frac{1}{2}, 0) = (0, -\frac{1}{4})$$
$$\nabla f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$$
$$\nabla f(0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{4}, 0)$$

ب) النقاط الحرجة هي النقاط التي تحقق $\nabla f = 0$. ومن ذلك نرى أن :

$$y(1 - y + 2x) = 0$$
$$x(1 - 2y + x) = 0$$

وبحل المعادلتين معاً نجد أن $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ هي النقطة الحرجة الوحيدة داخل المثلث.

ج) بيان الدالة داخل المثلث مبين في الشكل التالي.



من الواضح أن النقطة الحرجة هي نقطة صغرى (من الممكن التأكد من ذلك من المشتقة الثانية) لأن قيمة f عند $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ تساوي $-\frac{1}{27}$ ولكن أضلاع المثلث تشكل كانتور حيث إن $f = 0$.

(١٠,٥) إذا كانت $0 = (u,v)$حيث إن $u = x + y$ و $v = x^2 + xy + z^2$
فأثبت أن :

$$x + y = 2z\left[(\partial z/\partial y)_x - (\partial z/\partial x)_y\right]$$

الحل :

$$f = f(u,v) = 0 \Rightarrow \qquad df = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v du + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u dv = 0$$

إذن ، $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y$.

أي أن
$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left[2x + y + 2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\right] \qquad (1)$$

أيضاً $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x$.

أي أن
$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left[x + 2z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\right] \qquad (٢)$$

بقسمة (١) على (٢) نجد أن :

$$2x + y + 2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = x + 2z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

ومن هذا نرى أن :

$$.x + y = 2z\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\right]$$

(١٠،٦) استخدم التعويض $u = x + ct$ و $v = x - ct$ لاختزال معادلة الموج

$$\frac{c^2\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

إلى المعادلة

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$$

الحل :

$$z = z(u, v) \Rightarrow \quad dz = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v du + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u dv$$

عندئذ ،

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_t + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u$$

كما أن :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_x = c\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v - c\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_t = \left[\frac{\partial}{\partial u_v} + \frac{\partial}{\partial v_u}\right]\left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v + \frac{\partial}{\partial u_v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u + \frac{\partial}{\partial v_u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v + \frac{\partial}{\partial v_u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u$$

ومن ذلك نرى أن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \qquad (١)$$

الآن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t_x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_x = \left[c\frac{\partial}{\partial u_v} - c\frac{\partial}{\partial v_u}\right]\left[c\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v - c\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u\right]$$

$$= c\frac{\partial}{\partial u_v}\left[c\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v - c\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u\right] - c\frac{\partial}{\partial v_u}\left[c\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v - c\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u\right]$$

إذن ،

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2c^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + c^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \qquad (٢)$$

بضرب المعادلة برقم(٢) بالعدد $\frac{1}{2}$ وطرح الناتج من المعادلة رقم (١) نجد أن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$$

ولكن:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

وبهذا نخلص إلى أن:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0 \, .$$

لاحظ أنه من الممكن الحصول بسهولة على المؤثرين التفاضلين $\partial/\partial x_t$ و$\partial/\partial t_x$ من صيغ المشتقة الأولى $(\partial z/\partial x)_t$ و $(\partial z/\partial t)_x$ وذلك بترتيب المعادلات بحيث يظهر z دائماً كحد أخير في الطرف الأيمن، فمثلاً:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_x = \frac{\partial}{\partial t_x}(z) \quad = c\frac{\partial}{\partial u_v}(z) - c\frac{\partial}{\partial v_u}(z)$$

$$= \left[c\frac{\partial}{\partial u_v} - c\frac{\partial}{\partial v_u}\right](z)$$

وبهذا يكون:

$$\frac{\partial}{\partial t_x} = c\frac{\partial}{\partial u_v} - c\frac{\partial}{\partial v_u}$$

إن معالجة المؤثرات التفاضلية يشبه معالجة الصيغ الجبرية الاعتيادية عند الضرب وفك الأقواس وهكذا. لاحظ أن معادلة الموج هي معادلة سهلة المعالجة وذلك لأن c ثابت، فلو كان c دالة في x و y ومن ثم فهو ضمنياً دالة في u و v فإنه يلزمنا استخدام قاعدة الضرب عدداً من المرات كما في الحالة:

$$\varphi(u,v)\frac{\partial}{\partial u_v}\left[\varphi(u,v)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v\right] = \varphi(u,v)\left[\varphi(u,v)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_v\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v\right]$$

مما يزيد من تعقيد الحسابات.

(١٠,٧) جد ثم صنف جميع النقاط الحرجة الحقيقية للدالة :

$$f(x,y) = y^2(a^2 + x^2) - x^2(2a^2 - x^2)$$

حيث إن a ثابت.

الحل :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2xy^2 - 4a^2x + 4x^3 = 2x(y^2 - 2a^2 + 2x^2)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 2y(a^2 + x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y - 4a^2 + 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(a^2 + x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$$

لإيجاد النقاط الحرجة نقوم بحل النظام :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 0$$

أي النظام : $x(y^2 - 2a^2 + 2x^2) = 0$

$$y(a^2 + x^2) = 0$$

ونجد الحلول (النقاط الحرجة) هي $(0,0)$ و $(\pm a, 0)$.

ولتصنيف النقاط الحرجة نقوم بدراسة إشارة $det\,(\nabla\nabla f)$ حيث إن:

$$D = det(\nabla\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

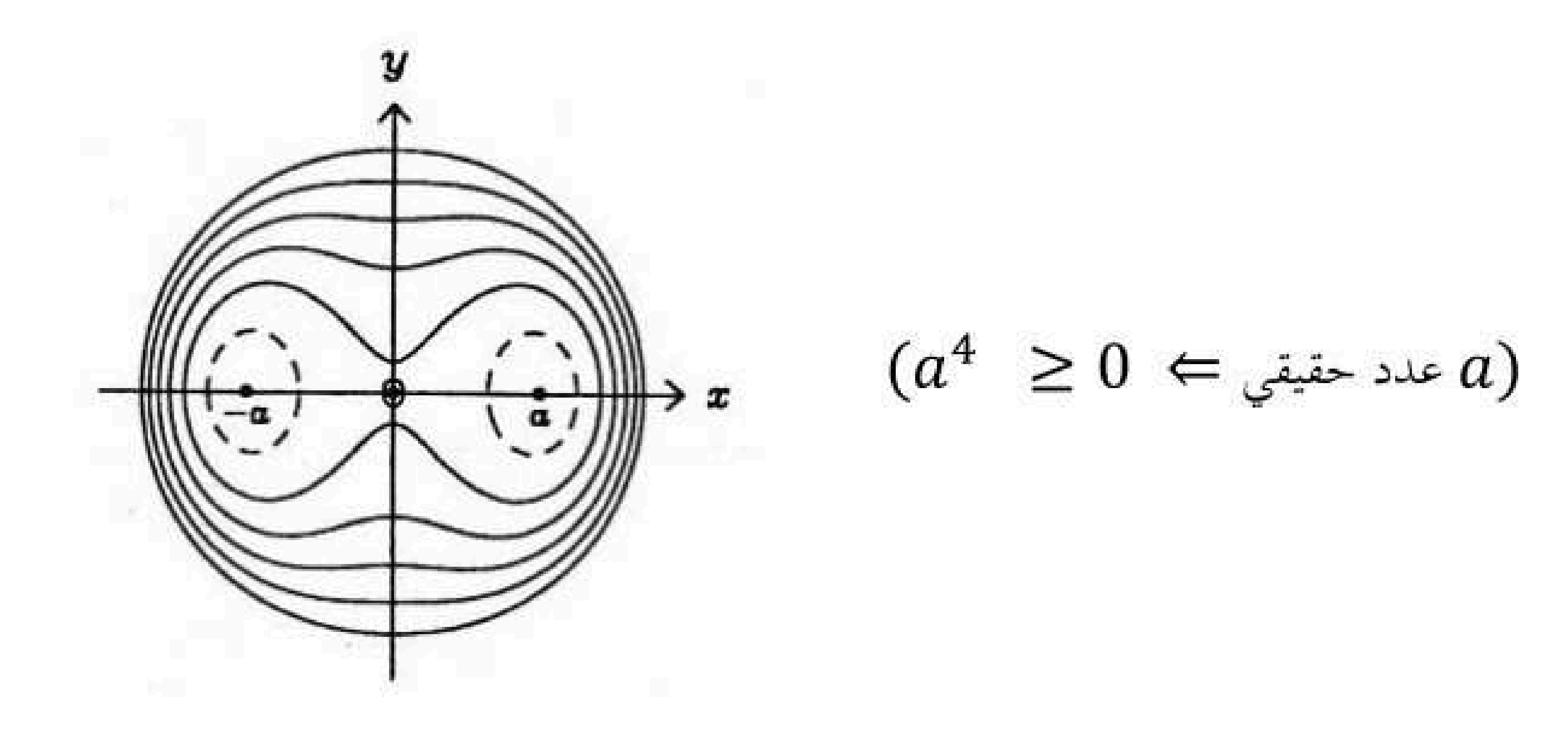
عند $(0,0)$: $D = -8a^4 < 0$ وبهذا تكون $(0,0)$ نقطة سرجية.

عند $(\pm a, 0)$: $D = 32a^2 > 0$ ومن ثم يمكن أن تكون نقطة عظمى أو صغرى، ولهذا يلزمنا دراسة إشارة $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ أو $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ أو

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

عند $(a, 0)$: و $\nabla^2 f = 12a^2 > 0$ ومن ثم تكون $(a, 0)$ نقطة صغرى.

عند $(-a, 0)$: $\nabla^2 f = 12a^2 > 0$ ومن ثم تكون $(-a, 0)$ نقطة صغرى أيضاً.



(a عدد حقيقي $\Leftarrow a^4 \geq 0$)

عند محاولة إيجاد النقاط الحرجة يكون من المناسب تحليل المشتقة الأولى بالقدر المستطاع.

ففي هذا التمرين $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 0$ يؤدي إلى أن $x = 0$ أو $y^2 - 2a^2 + 2x^2 = 0$ و $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 0$ يؤدي إلى أن $y = 0$ أو $a^2 + x^2 = 0$. وبدراسة الخيارات الأربعة نضمن حصولنا على جميع النقاط الحرجة.

(١٠,٨) استخدم طريقة ضوارب لاجرانج لإيجاد القيم الحرجة للدالة e^{-xy} مع الشرط الحدي $x^2 + y^2 = 1$.

الحل :

بوضع

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$
$$= e^{-xy} + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

نجد أن :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = -ye^{-xy} + 2x\lambda$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x = -xe^{-xy} + 2y\lambda$$

لإيجاد النقاط الحرجة نقوم بحل النظام :

$$-ye^{-xy} + 2x\lambda = 0 \qquad (١)$$

$$-xe^{-xy} + 2y\lambda = 0 \qquad (٢)$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad (٣)$$

بقسمة المعادلة رقم (١) على المعادلة رقم (٢) نجد أن :

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$$

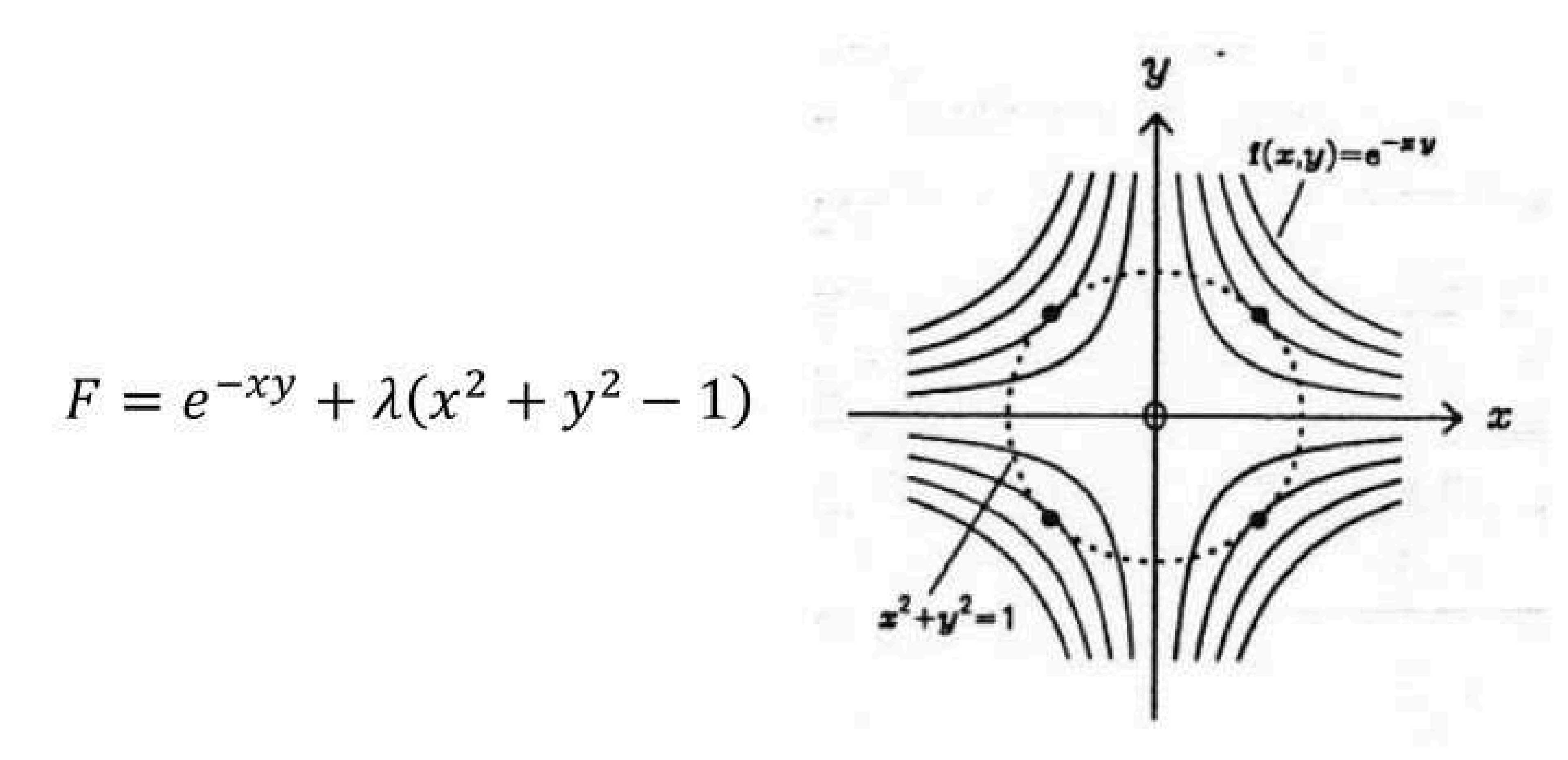
أي أن:

$$x^2 - y^2 = 0 \qquad (٤)$$

وبجمع المعادلتين رقم (٣) و (٤) نرى أن :

$$2x^2 = 1$$

وبهذا نجد أن $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. وبالتعويض في المعادلة رقم (٤) نجد أن $y = \pm x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
ومن ذلك نخلص إلى وجود قيمتين حرجتين هما $f = e^{-1/2}$ عند $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$
و $f = e^{1/2}$ عند $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ وهذا موضح بالبيان أدناه.



(١٠،٩) استخدم متسلسلة تايلور بعدة متغيرات للحصول على صيغة مناسبة لخوارزمية نيوتن ورافسون لإيجاد نقاط حرجة عددياً للدالة $f(x)$ في عدة متغيرات .

الحل :

يمكن الحصول على تعميم لمتسلسلة تايلور على النحو التالي (باستخدام مصفوفات ومتجهات) :

$$f(x) = f(x_o) + (x - x_o)^T \nabla f(x_o) + \frac{1}{2}(x - x_o)^T \nabla\nabla f(x_o)(x - x_o) + \cdots$$

وتتحقق النقاط الحرجة عندما يكون $\nabla f(x_o) = 0$.[١] أي عندما يكون :

$$\nabla f(x) = \nabla f(x_o) + \nabla\nabla f(x_o)(x - x_o) + \cdots = 0$$

لاحظ أنه يمكن التفكير بالصيغة أعلاه على أنها متسلسلة تايلور للدالة ∇f (عوضاً عن f).

إذا كان x_o تقريباً جيداً لحل المعادلة $\nabla f(x) = 0$ (على اعتبار أن الحدود العليا صغيرة ومن ثم يمكن تجاهلها) فإن :

---

(١) إذا كانت $f = f(,y)$ فإن:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

وإذا كانت $f = f(x_1, x_2, \cdots, x_M)$ فإن:

$$(\nabla f)_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$(\nabla\nabla f)_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$\nabla f(x_o) + \nabla\nabla f(x_o)(x - x_o) \approx 0$$

أي أن: $[\nabla\nabla f(x_o)]^{-1}[\nabla f(x_o) + \nabla\nabla(x_o)(x - x_o) \approx 0]$

وهذا يؤدي إلى أن $[\nabla\nabla f(x_o)]^{-1}\nabla f(x_o) + I(x - x_o) = 0$

إذن ، $[\nabla\nabla f(x_o)]^{-1}\nabla f(x_o) \approx x_o - x$

وبهذ نخلص إلى أن $x \approx x_o - [\nabla\nabla f(x_o)]^{-1}\nabla f(x_o)$

إن هذا يعني أنه يمكن الحصول على تقريب أفضل لحل المعادلة $\nabla f(x) = 0$ باستخدام قيمتي متجه الميل ومصفوفة المشتقة الثانية عند x_o وهذه هي الخطوة الأولى لخوارزمية نيوتن ورافسون:

$$x_{N+1} = x_N - [\nabla\nabla f(x_N)]^{-1}\nabla f(x_N)$$

حيث إن x_N هو التقريب من الرتبة .

تعد خوارزمية نيوتن ورافسون من أكثر الخوارزميات فعالية لإيجاد قيمة تقريبية لنقطة حرجة (إذا كان التقريب الأولي جيداً). أما إذا كان التقريب الأولي بعيداً عن قيمة النقطة الحرجة فإن الخوارزمية تتباعد بسرعة عن الحل.



الفصل الحادي عشر

التكاملات الخطية

LINE INTEGRALS

(١١،١) أثبت أن تكامل $y^3dx + 3xy^2dy$ لا يعتمد على المسار وذلك بحسابه من $(0,0)$ إلى $(1,1)$ باتباع المسارين :

أ) $y = x^2$

ب) المستقيمان من $(0,0)$ إلى $(1,0)$ ومن $(1,0)$ إلى $(1,1)$.

الحل :

أ) بما أن $dy = 2xdx$ فإن $y = x^2$. عندئذ ،

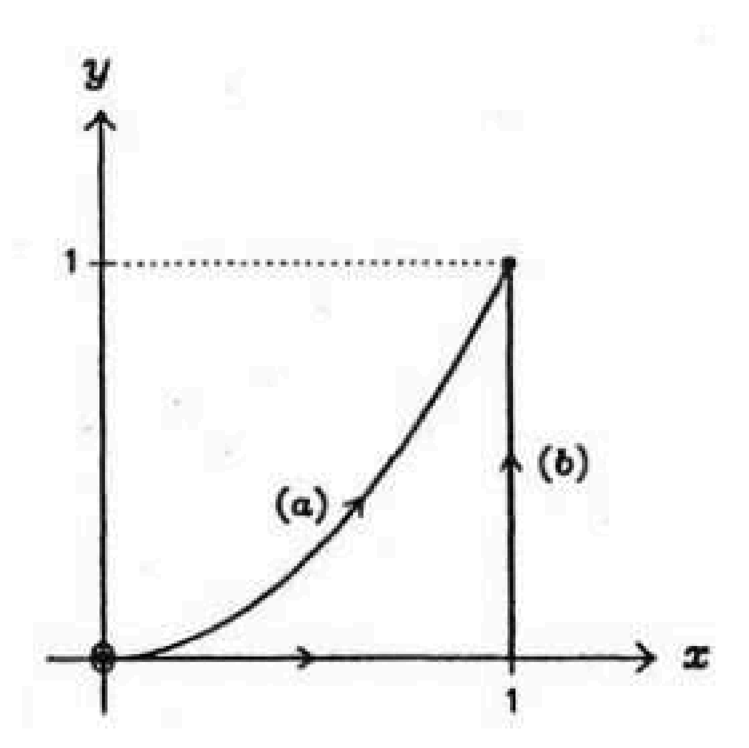
$$\int_{\text{المسار (أ)}}^{x} y^3dx + 3xy^2dy = \int_{x=0}^{x=1} (x^6 + 6x^6)\, dx = [x^7]_0^1 = 1 \,.$$

ب) من $(0,0)$ إلى $(1,0)$ لدينا $y = 0$ و $dy = 0$

ومن $(1,0)$ إلى $(1,1)$ لدينا $x = 0$ و $dx = 0$.

وبهذا نرى أن :

$$\int_{(ب)\ \text{المسار}}^{x} y^3dx + 3xy^2dy = 0 + \int_{y=0}^{y=1} 3y^2dy = [y^3]_0^1 = 1 \ .$$



إن حساب تكامل $y^3dx + 3xy^2dy$ على المسارين (أ) و (ب) دليل على أنه لا يعتمد على المسار ولكن البرهان العام يكون بإثبات صحة الشرط :

$$\frac{\partial}{\partial y_x}(y^3) = \frac{\partial}{\partial x_y}(3xy^2)$$

(١١,٢) احسب التكامل $xydl$ على المسارين (أ) و (ب) المقدمين في التمرين (١١,١)

الحل :

باستخدام مبرهنة فيثاغورس لدينا :

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

أ) للمسار $y = x^2$ لدينا $\frac{dy}{dx} = 2x$. حينئذ ،

$$\int_{\text{المسار (أ)}}^{x} xydl = \int_{x=0}^{x=1} x^3\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

بوضع $u^2 = 1 + 4x^2$ نجد أن $2udu = 8xdx$

ونرى أن:

$$\int_{\text{المسار (أ)}}^{x} xydl = \int_{u=1}^{u=\sqrt{5}} \frac{(u^2-1)}{4} u \frac{udu}{4}$$

$$= \frac{1}{16}\int_{1}^{\sqrt{5}} (u^4 - u^2)\,du$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{16}\left[5\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{16} \times \frac{(75-25)\sqrt{5} - 3 + 5}{15}$$

$$= \frac{50\sqrt{5}+2}{16\times 15} = \frac{25\sqrt{5}+1}{120}$$

ب) من $(0,0)$ إلى $(1,0)$ لدينا $y = 0$ و $dl = dx$

ومن $(1,0)$ إلى $(1,1)$ لدينا $x = 1$ و $dl = dy$. إذن ،

$$\int_{\text{المسار (ب)}}^{x} xy\,dl = 0 + \int_{y=0}^{y=1} y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

(١١,٣) إذا كان C_V لا يعتمد على الحجم V وكان :

$\delta q = C_V dT + (RT/V)dV$ ليس تفاضلاً تاماً حيث إن R ثابت فأثبت أن المعادلة تصبح تامة بعد قسمة طرفيها على T . ما أهمية ذلك في ديناميكا الحرارة؟

الحل :

بما أن C_V على لايعتمد V فإن :

$$\frac{\partial}{\partial V_T}(C_V) = 0$$

ولكن $\frac{\partial}{\partial T_V}\left(\frac{RT}{V}\right) = \frac{R}{V} \neq 0$.

إذن ، $\frac{\partial}{\partial T_V}(C_V) \neq \frac{\partial}{\partial V_T}\left(\frac{RT}{V}\right)$.

ونرى من ذلك أن $\delta q = C_V dT + \frac{RT}{V} dV$ ليس تفاضلاً تاماً.

ولكن بعد قسمة طرفي المعادلة على نجد أن :

$$\frac{\partial}{\partial T_V}\left(\frac{C_V}{T}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial T_V}\left(\frac{R}{V}\right)$$

وبهذا يكون :

$$\frac{\delta q}{T} = \frac{C_V}{T} dT + \frac{R}{V} dV$$

تفاضلاً تاماً.

تمثل δ في ديناميكا الحرارة ، التغير في الحرارة ، وبما أنها ليست تفاضلاً تاماً فإن حرارة النظام لاتعتمد فقط على الزمن الحاضر والشروط البدائية ولكن إلى كيفية الوصول لهذا الوضع. على سبيل المثال ، للانتقال من الحالة (P_1, V_1, T_1) إلى (P_2, V_2, T_2) من الممكن أن يكون الضغط والحجم ثابتين ودرجة الحرارة متغيرة أو العكس.

أما $\delta q/T$ نتمثل التغير في الإنتروبيا. وبما أن $\delta q/T$ تفاضل تام فإن :

$$\int \frac{\delta q}{T}$$

لا يعتمد على الطريقة التي اتبعها النظام للانتقال من الحالة :

(P_1, V_1, T_1) الحالة إلى (P_2, V_2, T_2).

الإنتروبيا هي دالة حالة ، أي أن قيمتها تعتمد على الحالة ولا تعتمد على كيفية الوصول إلى تلك الحالة.

من الجدير ذكره هنا أن $\frac{1}{T}$ هو معامل التكامل لهذه المسألة. أي أنه الحد الضارب الذي يحول تفاضل غير تام إلى تفاضل تام. وكان من الممكن الحصول عليه باعتباره دالة $w(T)$ تعتمد على الحرارة فقط من الشرط :

$$\frac{\partial}{\partial V_T}\left(\mathrm{C_V w(T)}\right) = \frac{\partial}{\partial T_V}\left(\frac{RT}{V}w(T)\right) \Longrightarrow 0 = \frac{RT}{V}\frac{dw}{dT} + \frac{R}{V}w$$

لاحظ أننا استخدمنا التفاضل التام $\frac{dw}{dT}$ عوضاً عن الجزئي $\left(\frac{\partial w}{\partial T}\right)_V$ لأنها دالة تعتمد على T فقط.

بتبسيط المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$\frac{dw}{dT} = \frac{-w}{T}$$

وهذه معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى (ندرسها في الفصل الثالث عشر) وحلها هو $w = \frac{A}{T}$ حيث إن A ثابت.

الفصل الثاني عشر

التكاملات المتعددة

MULTIPLE INTEGRALS

(١٢,١) أثبت أن مساحة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

تساوي πab .

الحل :

$$A=\iint\limits_{\text{القطع الناقص}} dxdy = 4\int_{y=0}^{x=a} dx \int_{y=0}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy$$

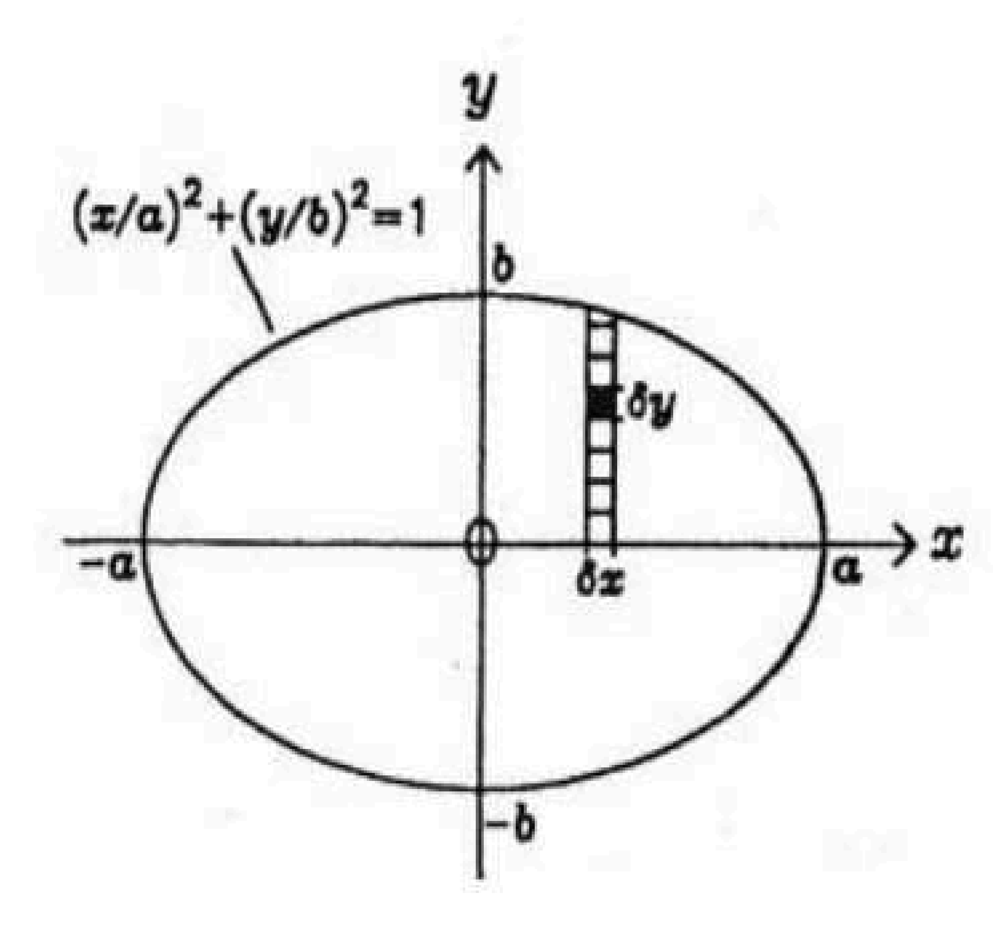
$$=4\int_{0}^{a} [y]_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\,dx$$

$$=\frac{4b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

وباستخدام التعويض $x=a$ نجد أن:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int_0^{\pi/2} cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} (cos2\theta + 1)\, d\theta = \frac{\pi a^2}{4}$$

إذن ، $A = \pi ab$.



لاحظ أننا استخدمنا التماثل عند حسابنا لمساحة القطع الناقص حيث قمنا بحساب المساحة في الربع الأول ثم حصلنا على المساحة الكلية بضرب المساحة في الربع الأول بالعدد 4. وبصورة عامة إذا كان البيان متماثلاً حول محور y أو نقطة الأصل فإننا نستغل هذا التماثل للتغلب على الصعوبات التي تنشأ أحياناً من حدود التكامل. وأحياناً يكون من المناسب التأكد من أن الحالات الخاصة تعطينا بعض القوانين المعروفة. ففي مثالنا هذا، إذا كان $a = b$ فنحصل على مساحة الدائرة ba^2 حيث إن a هو نصف القطر.

(١٢,٢) بالاستعانة بشكل مناسب، أثبت أن حجم شريحة صغيرة في الإحداثيات القطبية الكروية يساوي $r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$ ومن ثم استخدم ذلك لإيجاد صيغة لحجم الكرة.

الحل :

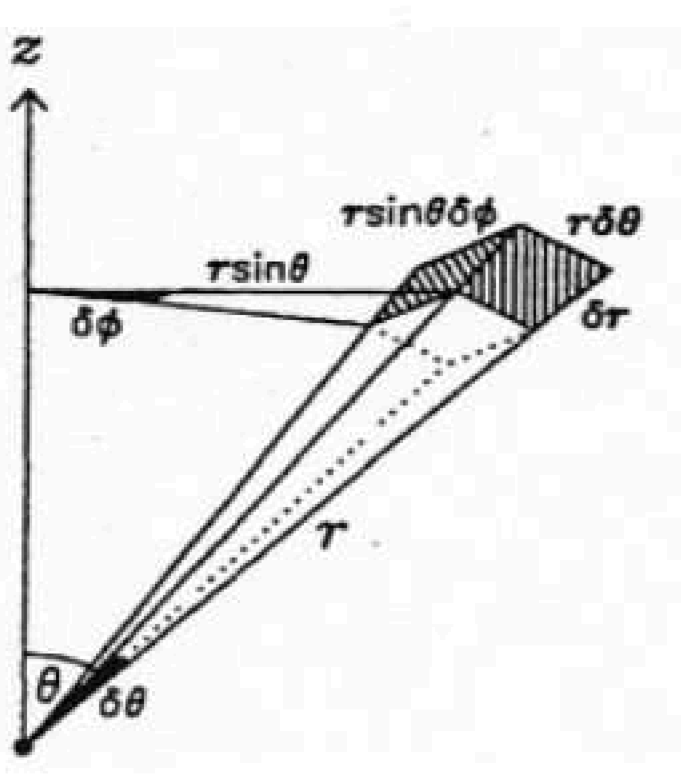
مـن الشـكل المـبين أدنـاه نجـد أن حجـم عنصـر حجمـي صـغير يسـاوي $\delta r \times \delta\theta \times r sin\theta \delta\varphi$ ولـــذا نجـــد أن حجـــم شـــريحة صـــغيرة يســـاوي $r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$. من ذلك نرى أن حجم الكرة هو:

$$V = \iiint_{\text{الكرة}}^{r} (\text{حجم شريحة صغيرة})$$

$$= \int_{r=0}^{R} r^2 dr \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} sin\theta d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\,\varphi$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \times [-cos\theta]_0^{\pi} \times [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{R^3}{3} \times (1+1) \times 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$



ترجـع سـهولة حسـاب التكامـل الثلاثـي أعـلاه إلى أن الإحـداثيات القطبيـة الكروية تلائم الطبيعة الهندسية للكرة حيث استطعنا الحصول على ثلاثة تكـاملات سهلة. في التمرين التالي سنرى أنه يمكن إجراء الحسابات باستخدام تماثل الكرة.

من الجدير ذكره أيضاً أن الشكل السابق يساعدنا على إيجاد المساحة السطحية للكرة وهي

$$S = \iint_{\text{كرة}} (\text{مساحة شريحة صغيرة})$$

$$= R^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} sin\theta d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi = 4\pi R^2$$

(لاحظ أن مساحة الشريحة الصغيرة تساوي $R^2 sin\theta d\theta d\varphi$).

(١٢.٣) أثبت باستخدام الإحداثيات القطبية الأسطوانية أن حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة تحت بيان الدالة $y = f(x)$ من $x = a$ إلى $x = b$ حول محور x دورة كاملة يساوي: $$\pi \int_a^b y^2\, dx$$

الحل :

حجم شريحة قطبية أسطوانية يساوي $rdrd\theta dx$. إذن ، حجم الدوران هو :

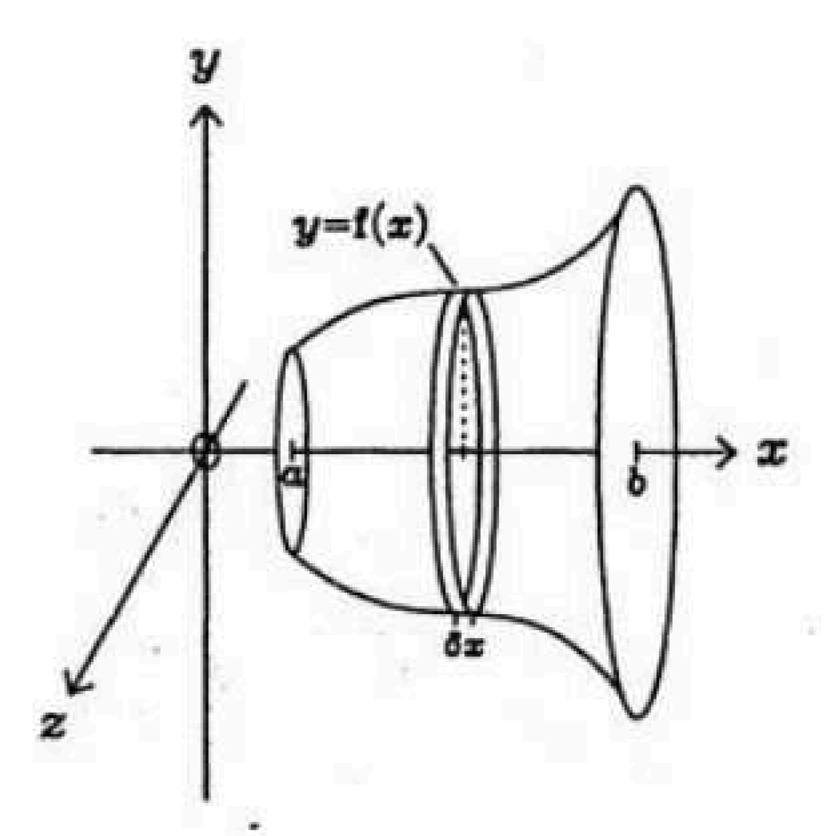
$$V = \iiint_{\text{الجسم}} (\text{حجم شريحة اسطوانية})$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} dx \int_{r=0}^{r=f(x)} r\, dr \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta$$

ولكن :

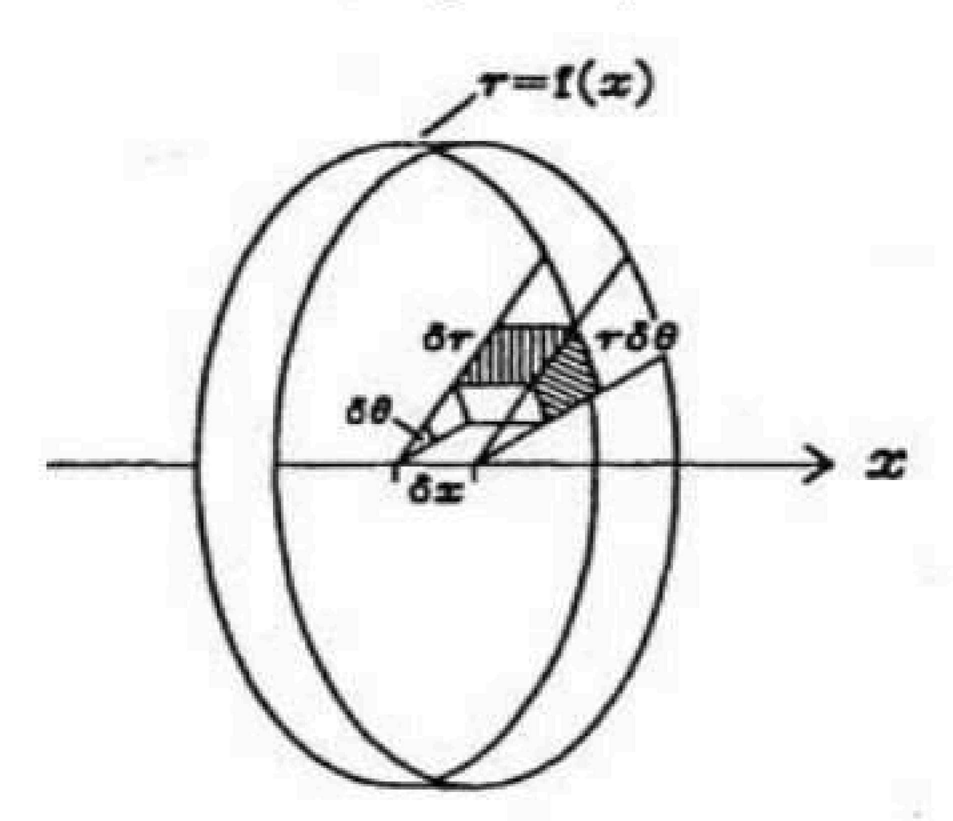
$$\int_{r=0}^{r=f(x)} r\, dr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{f(x)} = \frac{1}{2}[f(x)]^2 \quad \text{و} \quad \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

إذن ، $V = \pi \int_a^b y^2\, dx$.



لاحظ أننا لم نستطع حساب التكامل الثلاثي في هذا المثال كحاصل ضرب ثلاثة تكاملات أحادية بسيطة كما كان الحال في التمرين (٢ ، ١٢) ، ويرجع السبب إلى أن نصف القطر (أي أعلى قيمة للاحداثي r) تعتمد على الاحداثي x ، $r = f(x)$ ، ولهذا نستطيع حساب التكامل بالنسبة إلى θ لأنه مستقل عن الآخرين ولكننا لانستطيع فصل التكاملين بالنسبة إلى r و x لأن حدودهما متداخلة ، وفي الحقيقة إن محاولة تغيير ترتيب التكاملات يؤدي إلى تكاملات معقدة.

إذا قمنا بتقسيم الشكل الذي يمثل التكاملين بالنسبة إلى θ و r فنرى أن هذه الشرائح عبارة عن أقراص حجم كل منها يساوي $\pi[f(x)]^2$ (تذكر أن مساحة الدائرة تساوي πR^2). وبهذا يكون حجم جسم الدوران هو مجموع هذه الأقراص من $x = a$ إلى $x = b$ (انظر الشكل المبين أدناه).



أخيراً ، بما أن الكرة تنتج عن دوران نصف دائرة $x^2 + y^2 = R^2$ حيث إن $y \geq 0$ دورة كاملة فإننا نستطيع إيجاد حجمها كالتالي :

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

(١٢,٤) احسب التكامل :

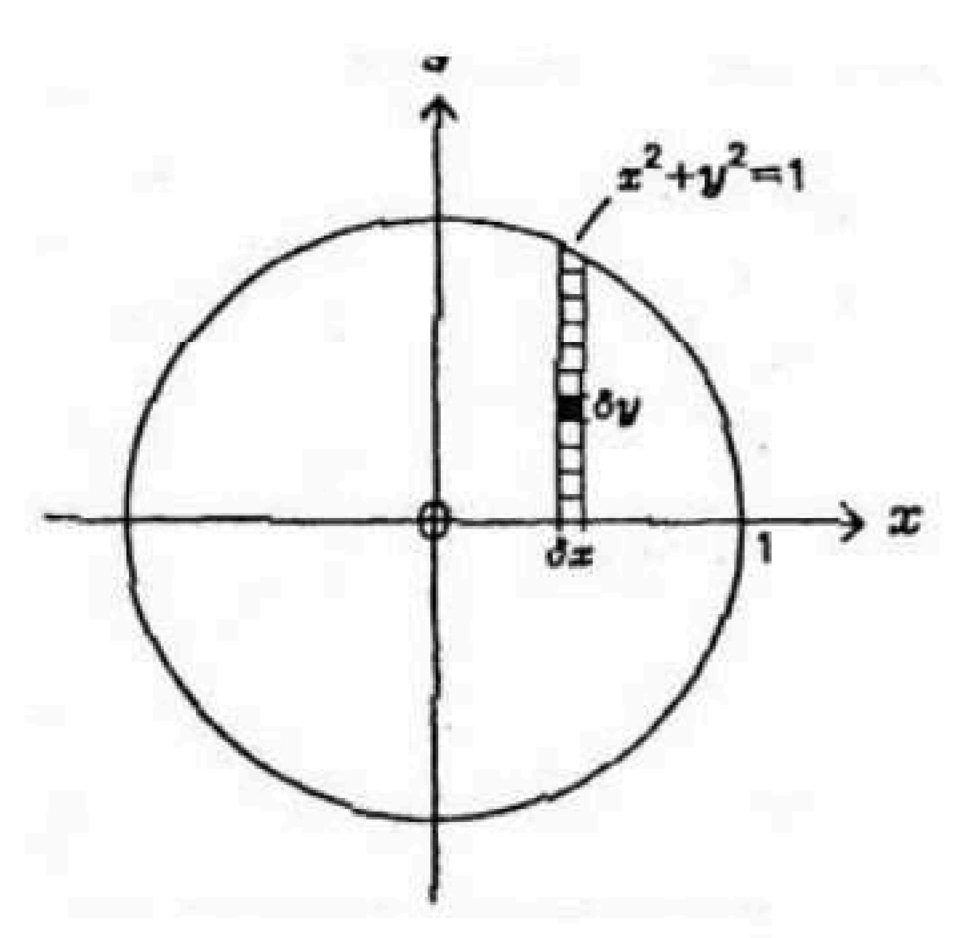
$$\iint x^2(1 - x^2 - y^2)\, dxdy$$

في المنطقة التي تمثلها دائرة الوحدة (أي $x^2 + y^2 = 1$) وذلك باستخدام :

أ) الإحداثيات الديكارتية. ب) الإحداثيات القطبية.

الحل :

أ) باستخدام خاصية التماثل للدالة المكاملة $x^2(1-x^2-y^2)$ على دائرة الوحدة (انظر الشكل أدناه) نجد أن :



$$\iint\limits_{x^2+y^2=1}^{x} x^2(1-x^2-y^2)dxdy = 4\int_{x=0}^{x=1} x^2\,dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)\,dy$$

$$= 4\int_0^1 x^2\left[y - x^2y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{1-x2}} dx$$

$$= 4\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\left[1-x^2-\frac{1-x^2}{3}\right]dx$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^1 x^2(1-x^2)^{3/2}dx$$

الآن ، بوضع $x = sin\theta$ نجد أن $dx = cos\theta d\theta$ ويكون :

$$\int_0^1 x^2(1-x^2)^{3/2}dx = \int_0^{\pi/2} sin^2\theta \, cos^4\theta d\theta$$

ولكن :

$$sin^2\theta sos^4\theta = (sin\theta cos\theta)^2 cos^2\theta$$

$$= \frac{sin^2(2\theta)}{4} \times \frac{1+cos\,(2\theta)}{2}$$

$$= \frac{1-cos\,(4\theta)}{8} \times \frac{1+cos\,(2\theta)}{2}$$

$$= \frac{1+cos(2\theta)-cos(4\theta)-\frac{1}{2}(cos(2\theta)+cos\,(6\theta)}{16}$$

$$= \frac{2+cos(2\theta)-2\,cos(4\theta)-cos(6\theta)}{32}$$

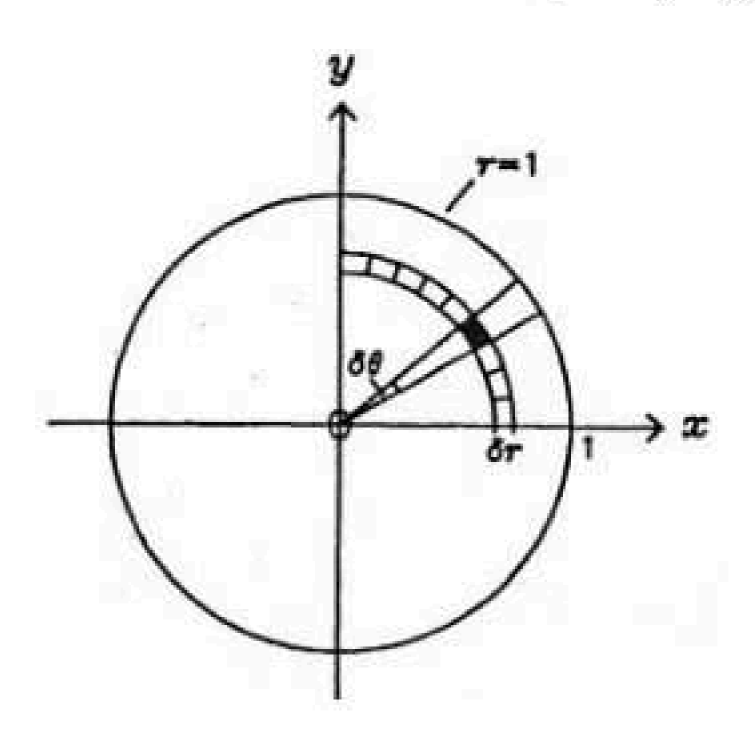
وبهذا نرى أن :

$$\iint_{x^2+y^2=1}^{x} x^2(1-x^2-y^2)dxdy = \frac{1}{12}\int_0^{\pi/2} [2+\cos(2\theta)-2\cos(4\theta)-\cos(6\theta)]d\theta$$

$$= \frac{1}{12}\left[2\theta + \frac{sin\,(2\theta)}{2} - \frac{sin\,(4\theta)}{2} - \frac{sin\,(6\theta)}{6}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{12}$$

ب) في الإحداثيات القطبية لدينا $dxdy = rdr$ ولذا باستخدام التعويض $x = rcos\theta$ و $y = rsin\theta$ نجد أن:



$$\iint_{x^2+y^2=1} x^2(1-x^2-y^2)dxdy = \iint_{x^2+y^2=1} r^2cos^2\theta(1-r^2)rdrd\theta$$

$$= 4\int_{r=0}^{r=1}(r^3-r^5)\,dr\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 4\left[\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1\int_0^{\pi/2}\frac{cos(2\theta)+1}{2}d\theta$$

$$= 4(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})\left[\frac{sin\,(2\theta)}{4}+\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 4\times\frac{3-2}{12}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

وهذا يتفق مع ما وجدنا في الفقرة (أ).

لاحظ أن استخدام الإحداثيات القطبية في هذا المثال وفر الكثير من الجهد ويرجع السبب في ذلك إلى أن حساب التكامل يتم على دائرة وبهذا تكون الإحداثيات القطبية أنسب من الإحداثيات الديكارتية. أما لو كانت المنطقة بشكل مستطيل أو مثلث قائم الزاوية فإن الإحداثيات الديكارتية تكون هي الأفضل.

الفصل الثالث عشر

المعادلات التفاضلية العادية

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

(١٣,١) يتناقص عدد الذرات المشعة N في مركب بالنسبة للزمن t حسب القانون

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

إذا كان عدد الذرات المشعة بداية يساوي N_o فجد صيغة لنصف الحياة (الزمن اللازم لكي يصبح عدد الذرات المشعة يساوي $\frac{N_o}{2}$).

الحل :

بما أن $\frac{d}{dt} = -\lambda N$ فإن :

$$\int_{N_o}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_{0}^{t} dt$$

ولذا فإن :

$$[lnN]_{N_o}^{N} = -\lambda t$$

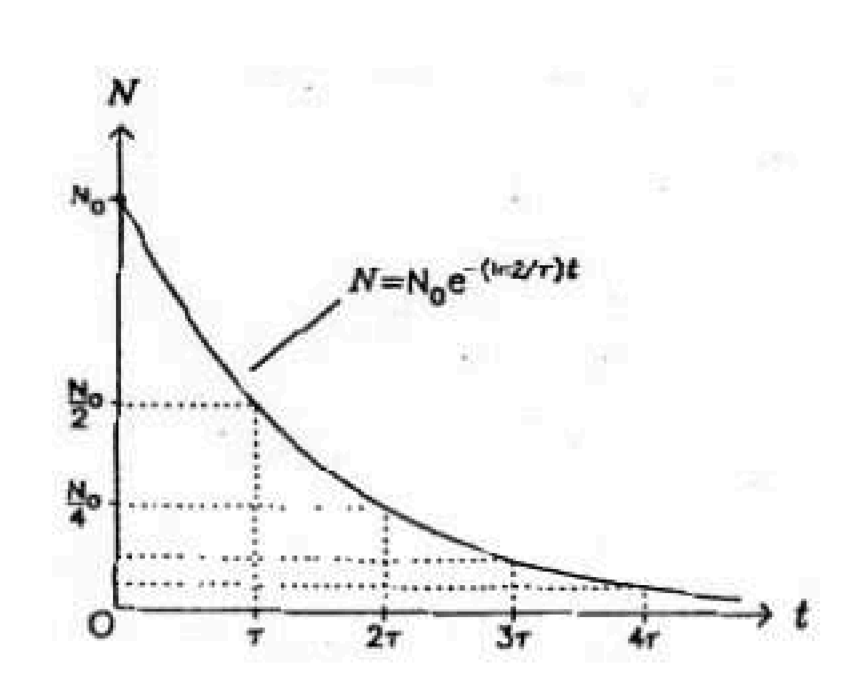
$$\Rightarrow ln\left(\frac{N}{N_o}\right) = -\lambda t$$

$$\Rightarrow N = N_o e^{-\lambda t}$$

لإيجاد نصف الحياة نضع $N = \frac{N_o}{2}$ فنجد إن :

$$\frac{N_o}{2} = N_o e^{-\lambda t} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t = ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln2$$

إذن ، $t = \frac{ln2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$.



(١٣,٢) جد الحل العام للمعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى :

أ) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-y^2}{x}$ ب) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2+xy}{x^2}$

ج) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+5}{x-y+2}$ د) $\frac{dy}{dx} + ycotx = cosecx$

هـ) $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$ و) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = cosx$

الحل :

أ)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-y^2}{x} \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{1-y^2}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{(1-y)(1+y)}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right) dy=\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[-\ln(1-y)+\ln(1+y)] = \ln x + A$$

$$\Rightarrow \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}=\ln x + A$$

$$\Rightarrow \frac{1+y}{1-y}=Bx^2$$

حيث إن $B=e^{2A}$.

ب) هذه معادلة متجانسة. بوضع $y=V$ نجد أن :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2+xy}{x^2} \quad \Rightarrow V+x\frac{dV}{dx}=2\left(\frac{y^2}{x^2}\right)+\frac{xy}{x^2}$$

$$\Rightarrow V+x\frac{dV}{dx}=2V^2+V$$

$$\Rightarrow x\frac{dV}{dx}=2V^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x}=\int \frac{dV}{2V^2}$$

$$\Rightarrow lnx = -\frac{1}{2V} + A$$

$$\Rightarrow lnx = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right) + A$$

إذن ،
$$y = \frac{-x}{2lnx + B}$$

ج) باستخدام التحويل الخطي $u = x + a$ و $v = y + b$ نجد أن $du = dx$ و $dv = dy$. وبهذا يكون:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 5}{x - y + 2} \quad \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{(u - a) + (v - b) + 5}{(u - a) - (v - b) + 2}$$

$$= \frac{u + v + 5 - a - b}{u - v + 2 - a - b}$$

الآن ، بوضع $5 - a - b = 0$ و $2 - a - b = 0$

نجد أن $a = \frac{7}{2}$ و $b = \frac{3}{2}$ وأن:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + v}{u - v}$$

الآن ، باستخدام التعويض $v = \theta u$ نجد أن:

$$\frac{dv}{du} = \theta + u\frac{d\theta}{du}$$

ومن هذا نرى أن :

$$\theta + u\frac{d\theta}{du} = \frac{u + v}{u - v} = \frac{1 + (v/u)}{1 + (v/u)} = \frac{1 + \theta}{1 - \theta}$$

أي أن :

$$u\frac{d\theta}{du} = \frac{1+\theta}{1-\theta} - \theta = \frac{1+\theta^2}{1-\theta}$$

إذن ،

$$\int \frac{1-\theta}{1+\theta^2} d\theta = \int \frac{du}{u}$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\theta}{1+\theta^2} - \int \frac{\theta}{1+\theta^2} d\theta = lnu + B$$

$$\Rightarrow tan^{-1}\theta - \frac{1}{2} ln(1+\theta^2) = lnu + B$$

$$\Rightarrow tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) = lnu + \frac{1}{2} ln\left(1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right) + B$$

$$\Rightarrow tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) = ln\left(u\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2}\right) + B$$

إذن ، $tan^{-1}\left(\frac{y+3/2}{x+7/2}\right) = ln\sqrt{(x+7/2)^2 + (y+3/2)^2} + B$.

د) معامل التكامل هو :

$$I(x) = exp\left(\int cotx\, dx\right) = exp(ln(sinx)) = sinx$$

ولذا فإن :

$$\frac{dy}{dx} + ycotx = cosecx \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}(ysinx) = sinxcosecx = 1$$

$$\Rightarrow ysinx = x + B$$

إذن ، $y = \frac{x + B}{sinx}$.

هـ) معامل التكامل هو :

$$I(x) = exp\left(\int 2x\, dx\right) = exp\,(x^2)$$

وبهذا يكون:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(ye^{x^2}\right) = xe^{x^2}$$

$$\Rightarrow ye^{x^2} = \int x\, e^{x^2} dx$$

$$\Rightarrow ye^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + A$$

إذن، $y = \frac{1}{2} + Ae^{-x^2}$.

و) معامل التكامل هو :

$$I(x) = exp\left(\int \frac{1}{x} dx\right) = e^{lnx} = x$$

ونرى أن :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = cosx \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}(xy) = xcosx$$

$$\Rightarrow xy = \int xcosx\, dx$$

$$\Rightarrow xy = xsinx - \int sinx\, dx$$

$$\Rightarrow xy = xsinx + cosx + A$$

إذن ، $y = sinx + \frac{cosx + A}{x}$.

(١٣,٣) معادلة برنولي هي :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = y^{\alpha}Q(x)$$

استخدم التحويل $v = y^{-(\alpha-1)}$ لتحويل معادلة برنولي إلى معادلة تفاضلية يمكن حلها باستخدام معامل التكامل ومن ثم جد الحل عندما يكون:

$P(x) = Q(x) = x$ و $\alpha = 2$.

الحل :

بوضع $v = y^{-(\alpha-1)}$ نجد أن :

$$\frac{dv}{dx} = -(\alpha - 1)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$$

وبهذا يكون:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = y^{\alpha}Q(x) \quad \Leftrightarrow \frac{y^{\alpha}}{-(\alpha - 1)}\frac{dv}{dx} + P(x)y = y^{\alpha}Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

وفي الحالة الخاصة ، $P(x) = Q(x) = x$ و $\alpha = 2$ نجد أن :

$$\frac{dv}{dx} - xv = -x$$

معامل التكامل هو :

$$I(x) = exp\left(-\int x\,dx\right) = e^{-x^2/2}$$

وبهذا نرى أن :

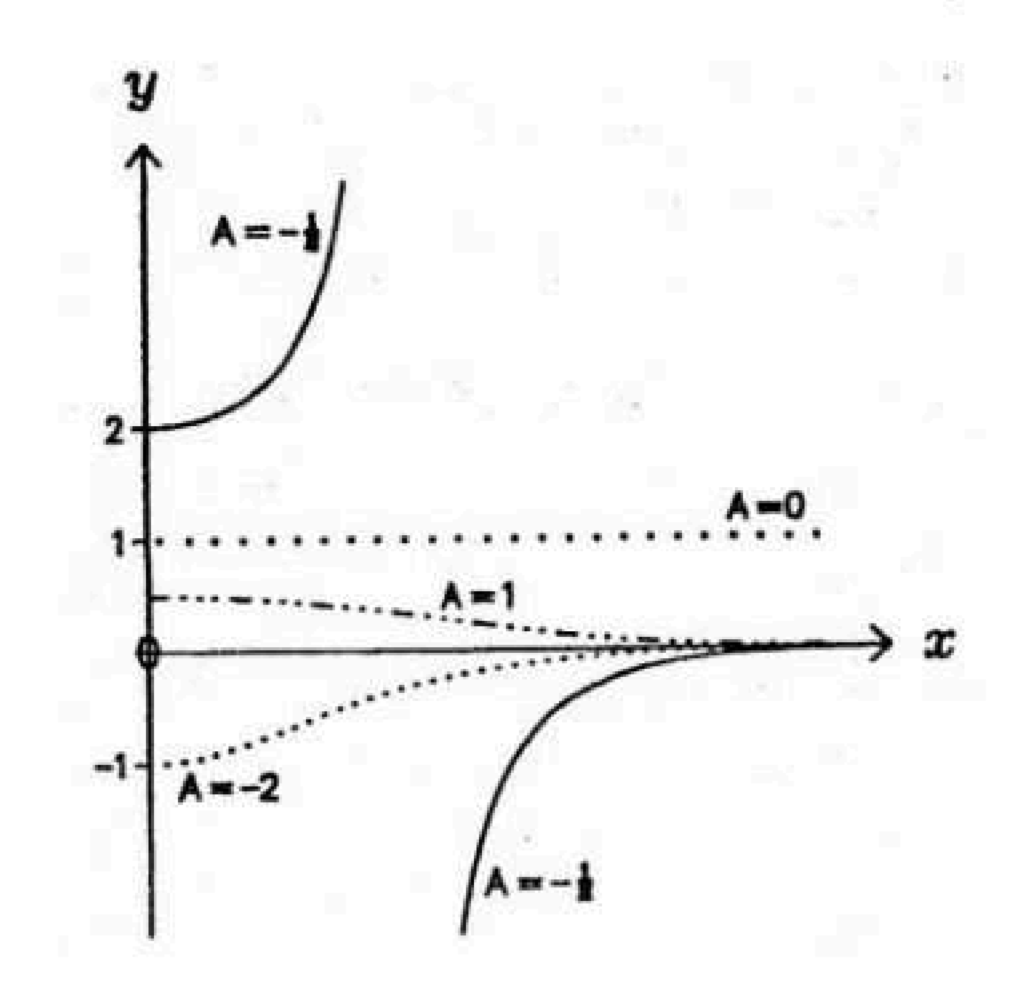
$$\frac{d}{dx}\left(ve^{-x^2/2}\right) = -xe^{-x^2/2}$$

$$\Rightarrow ve^{-x^2/2} = \int -xe^{-x^2/2}\,dx = e^{-x^2/2} + A$$

$$\Rightarrow v = 1 + Ae^{x^2/2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} - 1 = Ae^{x^2/2}$$

إذن ، $y = \dfrac{1}{1 + Ae^{-x^2/2}}$.



في أغلب الأحيان (وهذا الحال هنا) نجد أن حل المعادلات التفاضلية العادية غير الخطية يعتمد بشكل أساسي على ثابت التكامل.

(١٣,٤) أثبت أن الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية العادية الخطية من الرتبة الأولى هي :

$$[Q(x) - P(x)y]dx - dy = 0$$

بضرب طرفي المعادلة بالمعامل $I(x)$ والاختبار للتفاضل التام ، أثبت أن :

$$I(x) = exp\,(\int P(x)\,dx)$$

الحل :

$$I(x)\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y\right] = I(x)Q(x) \Leftrightarrow I(x)[Q(x) - P(x)y]dx - I(x)dy = 0$$

ولكي يكون هذا تفاضلاً تاماً يجب أن يتحقق الشرط :

$$\frac{\partial}{\partial y_x}\{I(x)[Q(x) - P(x)y]\} = \frac{\partial}{\partial x_y}(-I(x))$$

أي :

$$-I(x)P(x) = -\frac{dI}{dx}$$

وبهذا نرى أن :

$$\int \frac{dI}{dx} = \int P(x)\,dx \Rightarrow lnI = \int P(x)\,dx$$

أي أن :

$$.\,I(x) = exp\,(\int P(x)\,dx)$$

(١٣,٥) لتكن $y'' + k_1y' + k_2y = F(x)$.

أ) جد الحل العام عندما يكون $k_1 = -2$ ، $k_2 = -3$ ، $F(x) = sinx$.
ثم جد الحل الذي يحقق الشروط الحدية $y(0) = 0$ و y منته عندما $x \to \infty$.

ب) جد الحل العام عندما يكون $k_1 = -2$ ، $k_2 = -8$ ، $F(x) = x^2$.

ج) جد الحل العام عندما يكون $k_1 = 0$ ، $k_2 = w_0^2$ ، $F(x) = cos\,(x)$.
ادرس سلوك الحل عندما يكون $w = w_0$.

د) جد الحل العام عندما يكون $k_1 = 1$ ، $k_2 = 1$ ، $F(x) = cos\,(wx)$
جد حل حالة الثبوت وذلك بكتابة الطرف الأيمن كمركبة حقيقية لدالة أُسية مركبة ووضع $P = \{Aexp(iwx)\}$.

هـ) جد الحل العام عندما يكون $k_1 = 0$ ، $k_2 = 4$ ، $F(x) = \cos\,(2x)$.

الحل :

أ) الحل المتمم $c(x)$ هو الحل الذي يحقق $c'' - 2c' - 3c = 0$ وبوضع $c = Ae^{mx}$ نجد أن :

$$Ae^{mx}(m^2 - 2m - 3) = Ae^{mx}(m - 3)(m + 1) = 0$$

ونرى أن $c = e^{-x} + Ce^{3x}$. أما الحل الخاص $p(x)$ فيأخذ الشكل :

$$p(x) \ = Dsinx + Ecosx$$

$$p'(x) \ = Dcosx - Esinx$$

$$p''(x) \quad = -Dsinx - Ecosx$$

وبالتعويض في المعادلة $p'' - 2p' - 3p = sinx$ ومقارنة المعاملات نجد أن :

$$-4D + 2E = 1$$

$$-4E - 2D = 0$$

وبحل المعادلتين نجد أن $D = -\frac{1}{5}$ و $E = \frac{1}{10}$. إذن ، الحل العام هو :

$$.y = c + p = Be^{-x} + Ce^{3x} - \frac{1}{5}sinx + \frac{1}{10}cosx$$

الآن ، بقاء y منتهياً عندما يكون $x \to \infty$ يؤدي إلى أن $C = 0$.
وبتعويض $y(0) = 0$ في المعادلة نجد أن $B + \frac{1}{10} = 0$. أي أن $B = -\frac{1}{10}$. وبهذا نخلص إلى أن الحل هو :

$$.y = \frac{1}{10}(-e^{-x} - 2sinx + cosx)$$

ب) بوضع $(x) = Ae^{mx}$ والتعويض نجد أن :

$$Ae^{mx}(m^2 - 2m - 8) = Ae^{mx}(m + 2)(m - 4) = 0$$

وبهذا يكون $c(x) = Be^{-2x} + Ce^{4x}$.

الآن ، بوضع $p(x) = F + Ex + Dx^2$ نجد أن :

$$p'(x) = E + 2Dx$$

$$p''(x) = 2D$$

بالتعويض في المعادلة ومقارنة المعاملات نجد أن :

$$-8D = 1$$

$$-4D - 8E = 0$$

$$2D - 2E - 8F = 0$$

ويكون $D = -\frac{1}{8}$ ، $E = \frac{1}{16}$ ، $F = -\frac{3}{64}$.

إذن ، الحل العام للمعادلة هو :

$$y = Be^{-2x} + Ce^{4x} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x - \frac{3}{64}$$

ج) بوضع $(x) = Ae^{mx}$ والتعويض نجد أن:

$$Ae^{mx}(m^2 + w_0^2) = Ae^{mx}(m + iw_0)(m - iw_0) = 0$$

وبهذا يكون:

$$\begin{aligned} c(x) &= Ae^{-iw_ox} + Be^{iw_ox} \\ &= A\big(\cos(w_ox) - isin(w_ox)\big) + B\big(\cos(w_ox) + isin(w_ox)\big) \\ &= (A + B)\cos(w_ox) + (-iA + iB)sin\,(w_ox) \\ &= C\cos(w_ox) + D\sin(w_ox) \end{aligned}$$

حيث إن $C = A + B$ و $D = -iA + iB$. الآن،

$$p(x) = Ecos(wx) + Fsin(wx)$$

$$p'(x) = -Ewsin(wx) + Fwcos(wx)$$

$$p''(x) = -Ew^2\cos(wx) - Fw^2sin\,(wx)$$

بالتعويض في المعادلة ومقارنة المعاملات نجد أن :

$$E(-w^2 + w_0^2) = 1$$

$$F(-w^2 + w_0^2) = 0$$

ونرى أن $E = \frac{1}{w_0^2 - w^2}$ و $F = 0$.

إذن ، الحل العام هو :

$$y = C\cos(w_o x) + D\sin(w_o x) + \frac{\cos(wx)}{w_0^2 - w^2}$$

لاحظ أن $y \to \infty$ عندما $w \to w_o$.

وفي هذه الحالة نحصل على تذبذب توافقي بسيط عندما يكون التردد رناناً. ونرى من الناحية النظرية أن سعة التذبذب تزداد بلا حدود ، وأما من الناحية العملية فمن الممكن الوصول إلى حالة لا يتبع فيها النظام معادلة الحركة التوافقية البسيطة.

د) بوضع $(x) = Ae^{mx}$ والتعويض نجد أن :

$$m^2 + m + 1 = 0 \Rightarrow m = (-1 \pm \sqrt{-3})/2$$

ويكون $c(x) = e^{-x/2}\left[A\sin\left(\sqrt{3}x/2\right) + B\cos\left(\sqrt{3}x/2\right)\right]$

الآن ،

$$p(x) = E\cos(wx) + F\sin(wx)$$

$$p'(x) = -Ew\sin(wx) + Fw\cos(wx)$$

$$p''(x) = -Ew^2\cos(wx) - Fw^2\sin(wx)$$

بالتعويض في المعادلة ومقارنة المعاملات نجد أن :

$$-w^2E + wF + E = 1$$

$$-w^2F - wE + F = 0$$

وباستخدام طريقة المصفوفات لحل هذا النظام نجد أن:

$$\begin{pmatrix} 1-w^2 & w \\ -w & 1-w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

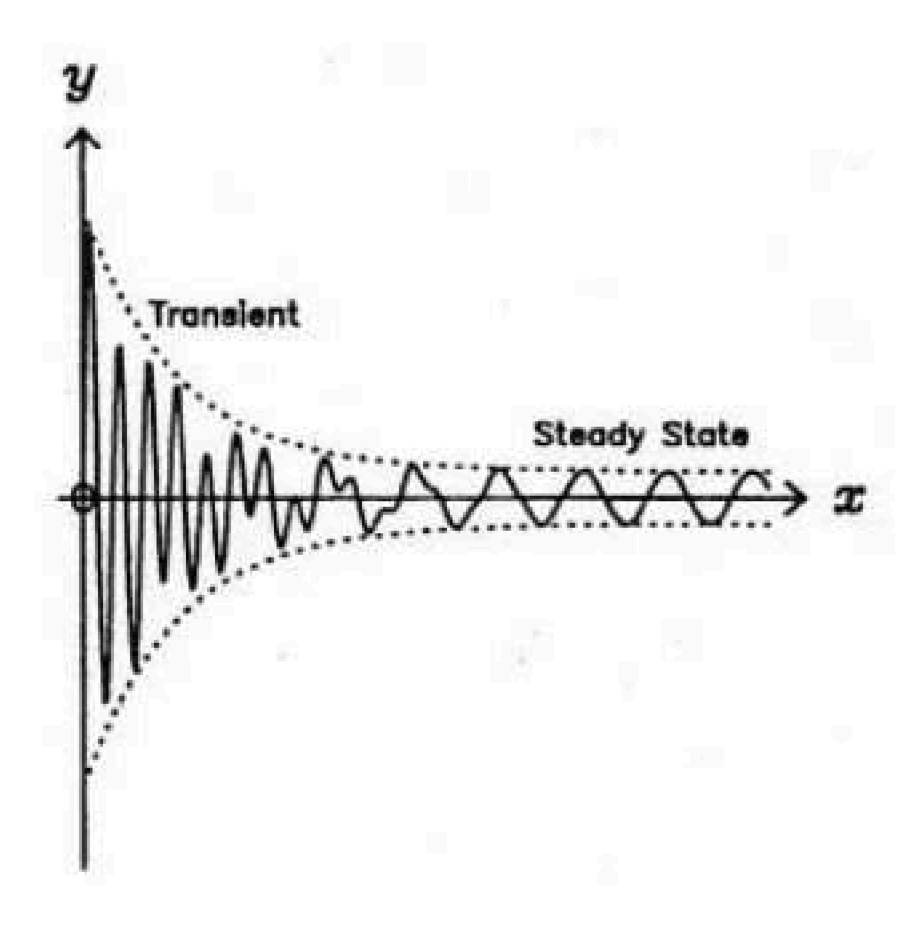
وبهذا يكون :

$$\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-w^2 & w \\ -w & 1-w^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{w^4 - w^2 + 1} \begin{pmatrix} 1-w^2 \\ w \end{pmatrix}$$

إذن ، الحل العام للمعادلة هو :

$$y = e^{-x/2}\left[Asin\left(\sqrt{3}x/2\right) + Bcos\left(\sqrt{3}x/2\right)\right] + \frac{1}{w^4 - w^2 + 1}\left[(1-w^2)\,cos(wx) + wsin(wx)\right]$$

يصف هذا الحل حركة تذبذبية مدفوعة للتخامد (انظر الشكل التالي) حيث يمثل الحد في الطرف الأيمن من المعادلة الأصلية قوة الدفع ويمثل y الإزاحة في النظام والمتغير x يمثل الزمن. إن وظيفة التخامد y' هي جعل الدالة المتممة $c(x)$ تقترب من الصفر عندما $x \to \infty$ (تُسمى $c(x)$ الحل العابر).



أما $p(x)$ فهو حل الحالة الثابتة ويصف لنا الحركة في اللحظة التي يخمد فيها الحل العابر. ويمكن إيجاد هذا الحل بطريقة أسرع بوضع :

$$p(x) = Re\{Aexp(iwx)\}$$

$$p'(x) = Re\{Aiwexp(iwx)\}$$

$$p''(x) = Re\{A(-w^2)\exp(iwx)\}$$

حيث العلاقة بين السعة $|A|$ والإزاحة الزّاويّة هي $A = |A|e^{i\varphi}$.

بالتعويض وكتابة الطرف الأيمن على الصورة $R\{Aexp(iwx)\}$ نحصل على :

$$(-w^2 + iw + 1)Aexp(iwx) = (1)exp\,(iwx)$$

وبهذا يكون $A = \dfrac{1}{-w^2 + iw + 1}$. إذن ،

$$Re\{Aexp(iwx)\} = Re\left\{\frac{cos(wx) + isin(wx)}{-w^2 + iw + 1}\left[\frac{-w^2 + 1 - iw}{-w^2 + 1 - iw}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{w^4 - w^2 + 1}[(1 - w^2)\,cos(wx) + wsin(wx)]$$

ومن السهل أن نرى أن السعة هي $\frac{1}{\sqrt{w^4-w^2+1}}$ وأن الإزاحة الزّاويّة هي :

$-arctan\left[\frac{w}{1-w^2}\right]$ وذلك من المعيار والإزاحة الزّاويّة للمقدار A.

هـ) بوضع $(x) = Ae^{mx}$ نجد أن :

$$m^2 + 4 = (m + 2i)(m - 2i) = 0 \Rightarrow m = \pm 2i$$

ونرى أن $(x) = Acos(2x) + Bsin(2x)$.

بما أن الدالة في الطرف الأيمن للمعادلة تظهر في الحل المتمم فالحل الخاص لا يمكن أن يكون على الصورة $(x) = Acos(2x) + Bsin(2x)$. وعوضاً عن ذلك فإننا نحاول :

$$p(x) = Cxcos2x + Dxsin2x$$

$$p'(x) = Ccos2x - 2Cxsin2x + Dsin2x + 2Dxcos2x$$

$$p''(x) = -2Csin2x - 2Csin2x - 4Cxcos2x + 2Dcos2x + 2Dcos2x$$

$$-4Dxsin2x$$

بالتعويض ومقارنة المعاملات نحصل على :

$$-4C + 4C = 0$$

$$-4D + 4D = 0$$

$$4D = 1$$

$$-4C = 0$$

ونرى أن $C = 0$ و $D = \frac{1}{4}$. إذن، الحل العام للمعادلة هو :

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x$$

عند حسابنا للحل الخاص $p(x)$ وجدنا أن قيمة أحد الثوابت (C) يساوي صفراً وهذا متوقع لأن الطرف الأيمن من المعادلة الأصلية دالة زوجية $(\cos(-2x) = \cos(2x))$. ولهذا فالطرف الأيسر يجب أن يكون دالة زوجية أيضاً. كما أن المؤثر التفاضلي $\frac{d^2}{dx^2} + 4$ زوجي أيضاً وبهذا فهو يحافظ على هذه الخاصية للدوال المؤثر عليها. من ذلك فإن $p(x)$ يجب أن يحتوي على دوال زوجية فقط ، وفي حالتنا $p(x) = x\sin(2x)$ وهو حاصل ضرب دالتين فرديتين ومن ثم فهو زوجي. إن معرفتنا لنوعية الحل (زوجي أم فردي) يوفر الكثير من الجهد في حسابات ميكانيكا الكم وخاصة تلك الحسابات المتعلقة بمعادلة شرودينغر.

(١٣,٦) حل المعادلة التفاضلية :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

بتجريب الحل $y = x^\lambda$ والتعويض $u = \ln x$.

الحل :

بوضع $y = Ax^\lambda$

نرى أن

$$\frac{dy}{dx} = A\lambda x^{\lambda-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد أن :

$$Ax^{\lambda}[\lambda(\lambda-1)+3\lambda+1]=0 \quad \Rightarrow [\lambda(\lambda-1)+3\lambda+1]=0$$

$$\Rightarrow (\lambda+1)^2=0$$

وعليه فإن الجذر المكرر -1 يزودنا بحل واحد فقط هو :

$$y = Ax^{-1}$$

وبما أن الحل العام لمعادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية يجب أن يحتوي على ثابتين فمن المؤكد وجود حل آخر. إذا حاولنا $y = x(x^{\lambda})$ كحل آخر كما هو متبع في المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة فنجد بعد التعويض أن هذا الحل هو الحل الذي وجدناه سابقاً. وللخروج من هذا المأزق نستخدم التعويض $u = Inx$ فنجد إن :

$$3x\frac{dy}{dx} = 3x\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3\frac{dy}{du}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = x^2\frac{du}{dx}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{du}\right) = \frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du}$$

وبهذا نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2y}{du^2} + 2\frac{dy}{du} + y = 0$$

وبوضع $(u) = Ae^{mu}$ نجد أن :

$$Ae^{mu}(m^2 + 2m + 1) = Ae^{mu}(m + 1)^2 = 0 \Rightarrow (m + 1)^2 = 0$$

ومن ذلك نحصل على الجذر المكرر $m = -1$. وبما أن معاملات هذه المعادلة ثابتة فنرى أن الحل العام هو :

$$y(u) = \mathrm{A}e^{-u} + Bue^{-u}$$

وباستخدام التعويض $u = Inx$ نجد أن :

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{-lnx} + Bln(x)e^{-lnx} \\ &= Ax^{-1} + Bln(x)x^{-1} \end{aligned}$$

.



الفصل الرابع عشر

المعادلات التفاضلية الجزئية

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

(١٤،١) جد $f(x,y)$ للتفاضل التام:

$$df = y\cos(xy)dx + [x\cos(xy) + 2y]dy$$

الحل :

إذا كانت $f = f(,y)$ فإن :

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right)_y dx + \left(\frac{df}{dy}\right)_x dy$$

وبما أن التفاضل تام فإن :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_y = y\cos(xy) \qquad (١)$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right)_x = x\cos(xy) + 2y \qquad (٢)$$

بمكاملة (١) بالنسبة إلى x نجد أن :

$$f(x,y) = sin(xy) + g(y) \qquad (٣)$$

باشتقاق (٣) بالنسبة إلى نجد أن :

$$\left(\frac{df}{dy}\right)_x = xcos(xy) + \frac{dg}{dy} \qquad (٤)$$

من (٢) و (٤) نجد أن :

$$xcos(xy) + \frac{dg}{dy} = xcos(xy) + 2y$$

ونرى أن $\frac{d}{dy} = 2y$ ومنه $g(y) = y^2 + C$.

إذن ، $f(x,y) = sin(xy) + y^2 + C$.

لاحظ أنه كان بالإمكان حل هذا التمرين بطرق أخرى. على سبيل المثال، بمكاملة (٢) بالنسبة إلى y واشتقاق الناتج بالنسبة إلى x ثم مقارنة ذلك مع (١) نحصل على دالة $h'(x)$ وبمكاملة هذه الدالة بالنسبة إلى x نحصل على المطلوب. ومن الممكن الحصول على الحل نفسه (باستثناء ثابت) مباشرة وذلك بمقارنة $f(,y)$ مع ناتج تكامل المعادلتين رقمي (١) و (٢).

(١٤,٢) أثبت أن $u(,t) = exp\,(-x^2/4kt)/\sqrt{4kt}$ حل لمعادلة الانتشار

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k\partial^2 u}{\partial x^2}$$

الحل :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_x = exp(-x^2/4kt)\left[\frac{\partial}{\partial t_x}\left(\frac{1}{\sqrt{4kt}}\right) + \frac{1}{\sqrt{4kt}}\frac{\partial}{\partial t_x}\left(\frac{-x^2}{4kt}\right)\right]$$

$$= exp(-x^2/4kt)\left[-2k(4kt)^{-3/2} + \frac{x^2}{4kt^2\sqrt{4kt}}\right]$$

$$= exp(-x^2/4kt)\left[\frac{x^2}{t} - 2k\right](4kt)^{-3/2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_t = \frac{exp(-x^2/4kt)}{\sqrt{4kt}}\frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{-x^2}{4kt}\right)$$

$$= -2xexp(-x^2/4kt)(4kt)^{-3/2}$$

إذن ،

$$\frac{k\partial^2 u}{\partial x^2} = k\frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_t$$

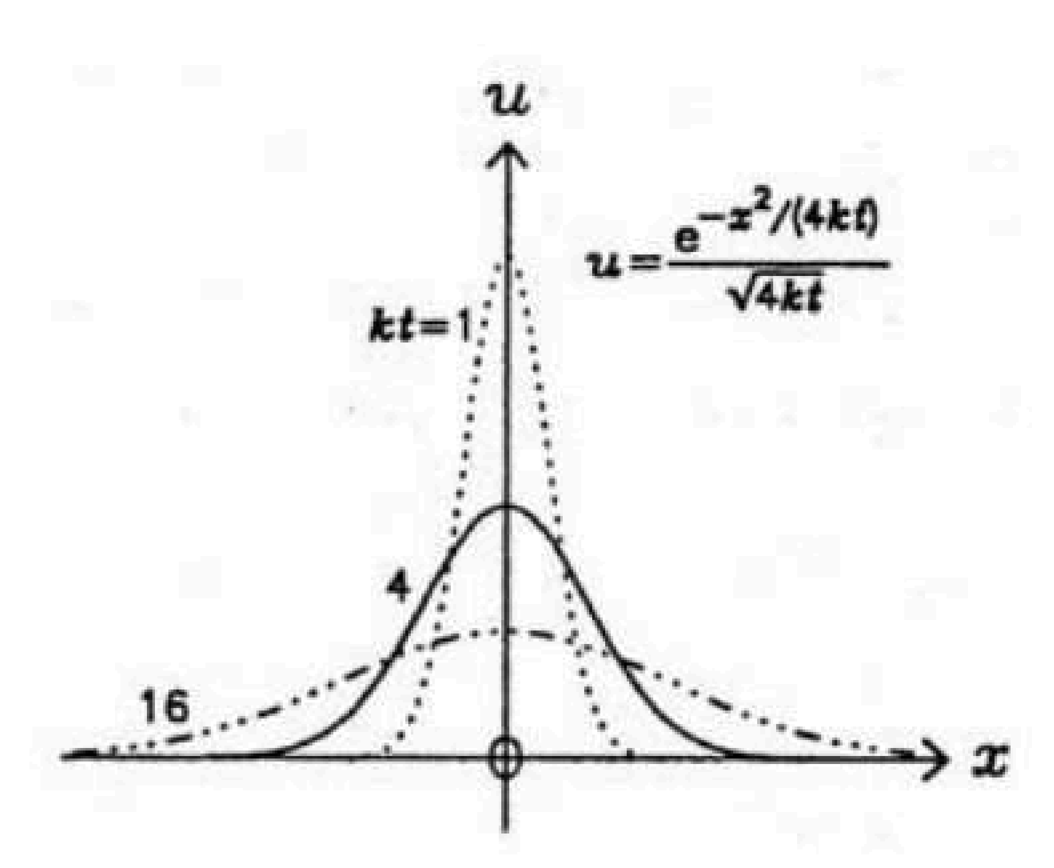
$$= -2kexp(-x^2/4kt)\left[\frac{\partial}{\partial x_t}(x) + x\frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{-x^2}{4kt}\right)\right](4kt)^{-3/2}$$

$$= -2kexp(-x^2/4kt)\left[1 - \frac{x^2}{2kt}\right](4kt)^{-3/2}$$

ونخلص إلى أن $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

يفسّر هذا الحل لمعادلة الانتشار كيفية انتشار الحرارة في قضيب معدني أو تركيز المذاب في محلول الذوبان مع الزمن. ففي اللحظة t تأخذ دالة التوزيع (في المتغير x) شكل دالة المعرفة غير المحدودة لجاوس (تسمى هذه الدالة في الاحتمال والاحصاء بدالة التوزيع الطبيعي). عندما يكون مركزها عند نقطة الأصل فإن بيانها يشبه بيان الدالة الأُسية التربيعية $exp(-x^2/2\sigma^2)$ (انظر الشكل التالي).

حيث العرض يساوي الثابت σ وهو الانحراف المعياري (σ^2 يسمى التباين). في حالة الانتشار يكون $\sigma \propto \sqrt{t}$ ، أي أن الانتشار يتضاعف كلما ازداد الزمن أربعة أمثال وهكذا.



أما المعامل $\frac{1}{\sqrt{4}}$ فهو حد معياري يضمن أن يكون تكامل الانتشار ثابتاً مع الزمن ، أي أن العدد الكلي لجزيئات المذاب يبقى عدداً ثابتاً بغض النظر عن كيفية انتشارها. في حالة توزيع جاوس الطبيعي $exp(-x^2/2\sigma^2)$ يكون الحد المعياري يساوي $(\sigma\sqrt{2}\pi)^{-1}$.

(١٤,٣) لتكن :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{8\pi^2 mE\Psi}{h^2} = 0$$

هي معادلة شرودينغر للإلكترونات الحرة في فضاء ثنائي البعد. جد دوال الموج Ψ ومستويات الطاقة المسموحة E إذا كانت الحدود الشرطية هي :

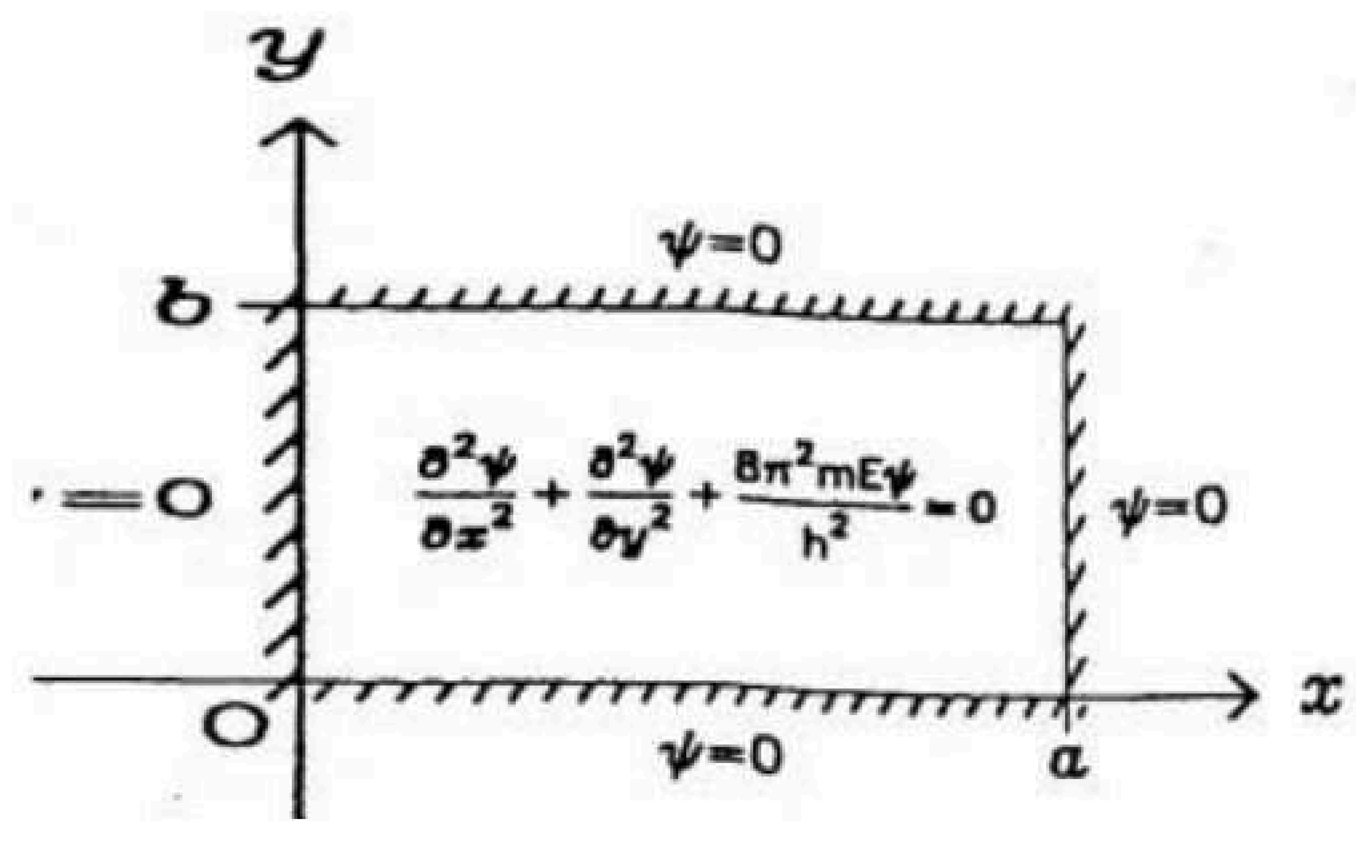
$$\Psi(0, y) = 0$$

$$\Psi(x, 0) = 0$$

$$\Psi(a, y) = 0$$

$$\Psi(x, b) = 0$$

الحل :



بوضع $(x, y) = X(x)Y(y)$ نجد أن :

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{8\pi^2 mEXY}{h^2} = 0$$

أي أن :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{8\pi^2 mE}{h^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = w^2$$

ونرى أن $\frac{d^2Y}{dy^2} = -w^2 Y$ و $\frac{d^2X}{dx^2} = -\left(\frac{8\pi^2 mEXY}{h^2} - w^2\right)X$.

إذن ، $Y = Csin(wy) + Dcos(wy)$ و $X = Asin(\Omega x) + Bcos(\Omega x)$

حيث إن $\Omega^2 = \frac{8\pi^2 mE}{h^2} - w^2$. وبهذا تكون الحلول :

$$\Psi(x, y) = [Asin(\Omega x) + Bcos(\Omega x)][Csin(wy) + Dcos(wy)]$$

ولكن

$$\Psi(0, y) = 0 \quad \Rightarrow B = 0$$

$$\Psi(x, 0) = 0 \quad \Rightarrow D = 0$$

$\Psi(a, y) = 0 \Rightarrow sin\ (\Omega a) = 0$. أي أن $\Omega = \pi/a$ حيث إن k عدد صحيح.

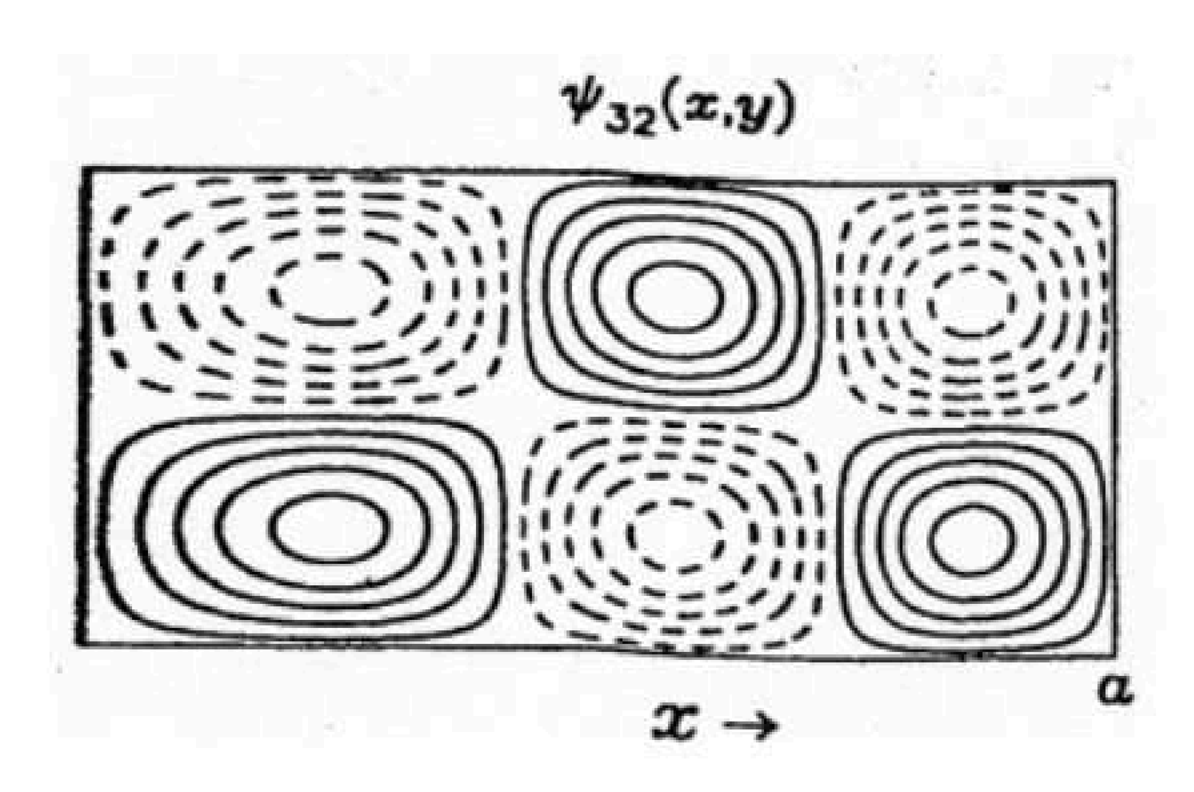
$\Psi(x, b) = 0 \Rightarrow sin\ (wb) = 0$. أي أن $w = \pi/a$ حيث إن l عدد صحيح.

إذن ، الحلول هي :

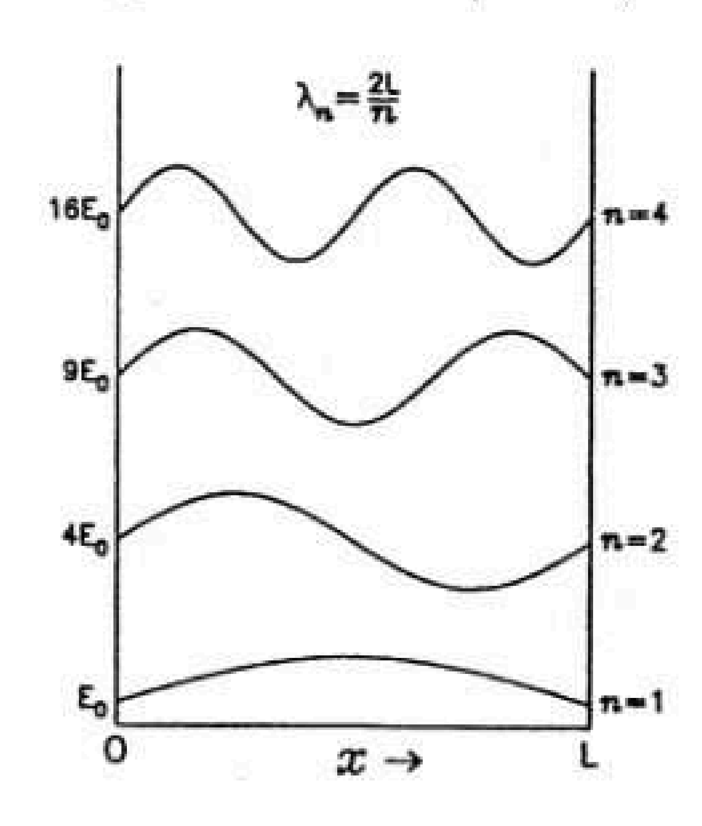
$$\Psi_{kl}(x, y) = A_{kl}\, sin(k\, \pi x/a)\, sin(l\, \pi y/b)$$

حيث إن $l = 1,2,3, \cdots$ و $k = 1,2,3, \cdots$.

ولكن $E = \frac{h^2\left(\Omega^2+w^2\right)}{8\pi^2 m}$. وعليه نجد أن $E_{kl} = \frac{h^2}{8}\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}\right)$.



هذا التمرين هو الحالة في الفضاء ثنائي البعد لمسألة ميكانيكا الكم القياسية "الجزئ في الصندوق". أما حالة الفضاء أحادي البعد فيمكن وصفها بالشكل المبين أدناه لزنبرك ، البعد بين طرفيه (بعد شده) يساوي L. وهذا يعني أن L يساوي نصف أطوال الموجات. أي أن $L = \frac{n\lambda}{2}$ حيث إن $n = 1,2,3,\cdots$ و λ طول الموجة. ينص قانون بروجلي على أن العلاقة بين العزم المرتبط مع طول الموجة الكمية λ هو $P = h/\lambda$ حيث إن h هو ثابت بلانك. ولذا فالطاقة الحركية $P^2/2m$ حيث إن m كتلة الجزئ هي $h^2/(2m\lambda^2) = h^2n^2/(8mL^2)$. إن الصيغة E_{kl} المبينة في التمرين هي مجموع إسهامين من البعد 1 وأن Ψ_{kl} هي حاصل ضرب حلين بالاتجاهين x و y.



(١٤,٤) لتكن :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}=0$$

هي معادلة لابلاس بالإحداثيات القطبية (r,θ). استخدم طريقة فصل المتغيرات لإثبات وجود حلول على الصورة :

$$\Phi(r,\theta)=(A_o\theta+B_o)(C_o lnr+D_o)$$

و

$$\Phi(r,\theta)\left[A_p\cos(p\theta)+B_p\sin(p\theta)\right](C_p r^p+D_p r^{-p})$$

حيث إن A ، B ، C ، D ، p ثوابت.

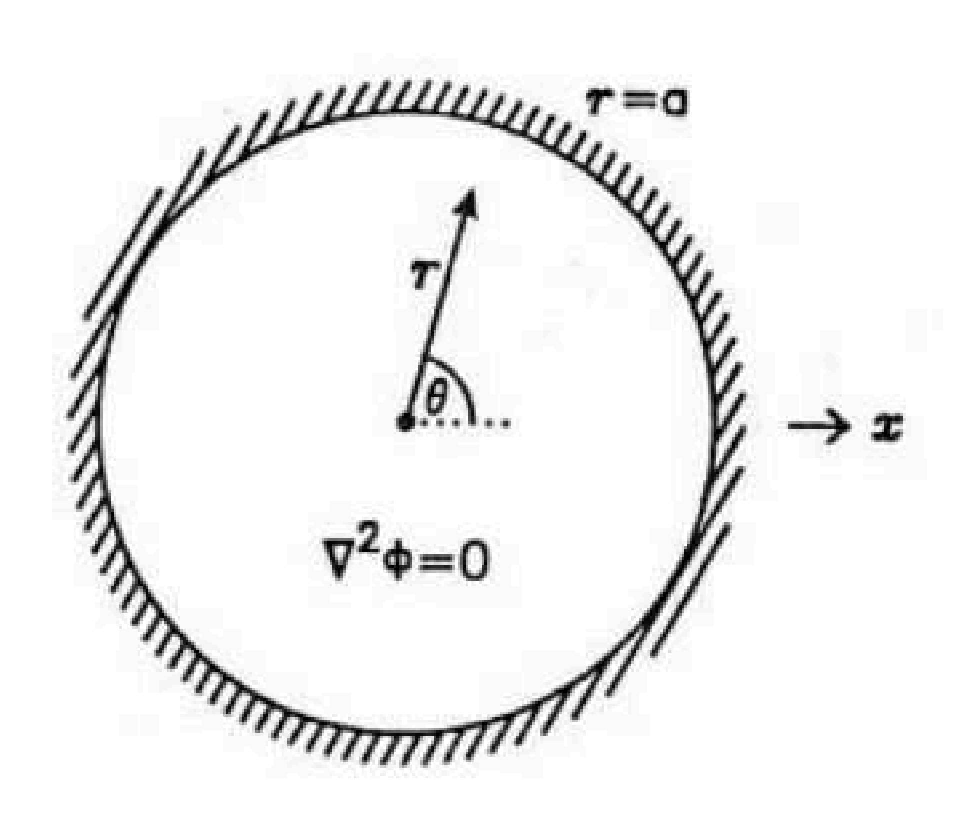
إذا كانت Φ دالة في متغير واحد θ فما تأثير ذلك على P ؟

حل المعادلة في الحالات التالية :

أ) $\Phi(a,\theta)=T\cos\theta$ حيث إن $0<r<a$.

ب) $\Phi(a,\theta)=T\cos^3\theta$ حيث إن $0<r<a$.

الحل :



بوضع $(r,\theta) = R(r)\theta(\theta)$ نجد أن :

$$\theta \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{\theta}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{R}{r^2}\frac{d^2\theta}{d\theta^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{r}{R}\frac{dR}{dr} = -\frac{1}{\theta}\frac{d^2\theta}{d\theta^2} = p^2$$

$$\Rightarrow r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} = p^2R \quad \text{و} \quad \frac{d^2\theta}{d\theta^2} = -p^2\theta$$

في الحالة الخاصة $p = 0$ نرى أن :

$$r\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{dR}{dr} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d\Theta}{\theta} = A_o$$

$$\Rightarrow r\frac{dR}{dr} = C_o \quad \text{و} \quad \Theta(\theta) = A_o\theta + B_o$$

ولكن $\int dR = C_o\int\frac{dr}{r} \Rightarrow R(r) = C_o lnr + D_o$.

ويكون الحل في الحالة $p = 0$ هو :

$$\Phi(r,\theta) = (A_o\theta + B_o)(C_o lnr + D_o)$$

أما إذا كان $p \neq 0$ فإن :

$$\Theta = A_p\, cos(p\theta) + B_p sin\,(p\theta)$$ (حركة توافقية بسيطة)

لحل المعادلة : $r^2\dfrac{d^2R}{dr^2} + r\dfrac{dR}{dr} = p^2R$ ضع $R(r) = r^\alpha$.

حينئذ ، $\dfrac{d^2R}{dr^2} = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$ و $\dfrac{dR}{dr} = \alpha r^{\alpha-1}$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha = p^2r^\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = p^2 \Rightarrow \alpha = \pm p$$

$$\Rightarrow R(r) = C_p r^p + D_p r^{-p}$$

إذن ، يكون الحل في هذه الحالة هو :

$$\Phi(r,\theta) = \left[\theta A_p\, cos(p\theta) + B_p sin\,(p\theta)\right]\left(C_p r^p + D_p r^{-p}\right)$$

الآن ، إذا كانت Φ دالة في المتغير θ فقط فيكون :

$\Phi(r,\theta) = \Phi(r,\theta + 2\pi n)$ لكل عدد صحيح n.

إن ذلك غير محقق إذا كان $p = 0$. أما إذا كان $p \neq 0$ فإن ذلك محقق عندما يكون p صحيحاً. أي $p = \pm 1, \pm 2, \cdots$.

إذا أردنا إيجاد الحلول المنتهية عندما $r = 0$ فنرى أن $D_p = 0$ ، ويكون الحل العام :

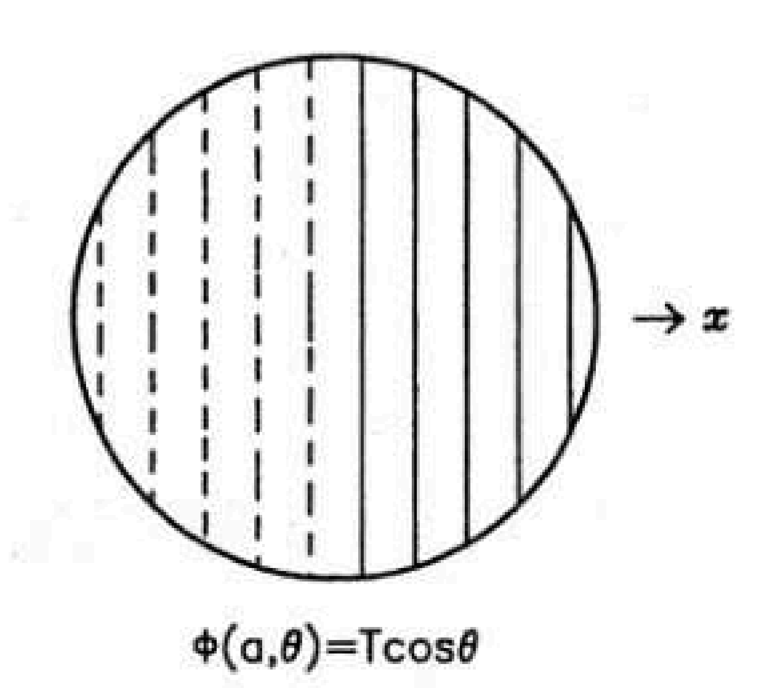
$$\Phi(r,\theta) = \sum_p \left[A_p \cos(p\theta) + B_p \sin(p\theta)\right] C_p r^p$$

أ) $$\Phi(a,\theta) = T\cos\theta$$

$A_p = 0$ عندما يكون $p \neq 1$ و $\Rightarrow B_p = 0$

$$\Rightarrow T\cos\theta = A_1 C_1 a\cos\theta \quad \Rightarrow \quad A_1 C_1 = T/a$$

إذن ، الحل هو $\Phi(r,\theta) = \dfrac{Tr}{a}\cos\theta$.



$\Phi(a,\theta)=T\cos\theta$

ب) $\Phi(a,\theta) = T\cos^3\theta$. عندئذ ،

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta} + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{8}$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$

إذن ،

$$\Phi(a,\theta) = \frac{3T}{4}cos\theta + \frac{T}{4}cos3\theta$$

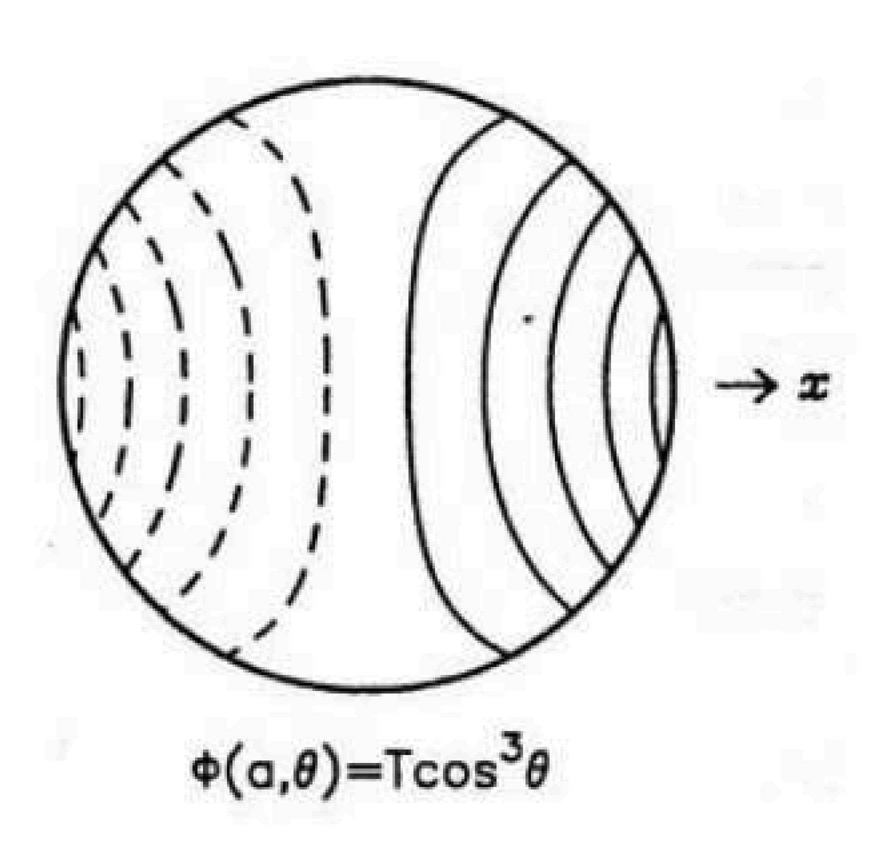
$A_p = 0$ عندما يكون $p \neq 1$ أو $p \neq 3$ و $\Rightarrow B_p = 0$

$$\Rightarrow \Phi(r,\theta) = A_1C_1rcos\theta + A_3C_3r^3cos3\theta$$

وباستخدام الشرط $r = a$ نجد أن:

$$\frac{3T}{4} = A_1C_1a \quad و \quad \frac{T}{4} = A_3C_3a^3$$

إذن ، الحل هو: $\Phi(r,\theta) = \frac{3Tr}{4a}cos\theta + \frac{Tr^3}{4a^3}cos3\theta$.



$\Phi(a,\theta)=T\cos^3\theta$

الفصل الخامس عشر

متسلسلة وتحويلات فوريية

FOURIER SERIES & TRANSFORMS

(١٥,١) أثبت أن الدوال $sin\ (m\omega x)$ و $cos\ (n\omega x)$ متعامدة في الفترة $0 \le x \le 2\pi/\omega$. استخدم ذلك لإيجاد صيغ لمعاملات متسلسلة فوريه.

الحل :

$$\int_0^{2\pi/\omega} sin\ (m\omega x)\ cos\ (n\omega x) dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/\omega} \left[sin[(m+n)\omega x] + sin[(m-n)\omega x]\right] dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{sin[(m+n)\omega x]}{(m+n)\omega} + \frac{cos[(m-n)\omega x]}{(m-n)\omega}\right]_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{1 - cos[2\pi(m+n)]}{2(m+n)\omega} + \frac{1 - cos[2\pi(m-n)]}{2(m-n)\omega}$$

$$= 0$$

لكل عددين صحيحين m و n.

لاحظ أننا افترضنا أن $m \neq$ (لا يمكن القسمة على الصفر) ، ولكن النتيجة تبقى صحيحة عندما $m = n$ لأنه من الممكن تبسيط الحسابات بحيث يكون الحد $sin[(m-n)\omega x]$ والحدود التي تلي ذلك أصفاراً.

إذا كان $m \neq n$ فإن :

$$\int_0^{2\pi/\omega} sin\,(m\omega x)\, sin(n\omega x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi/\omega} \big[cos[(m+n)\omega x] - cos[(m-n)\omega x]\big]\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{sin[(m+n)\omega x]}{(m+n)\omega} - \frac{sin[(m-n)\omega x]}{(m-n)\omega}\right]_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{sin[2\pi(m-n)]}{2(m-n)\omega} - \frac{sin[2\pi(m+n)]}{2(m+n)\omega}$$

$$= 0$$

أما إذا كان $m = n$ فإن:

$$\int_0^{2\pi/\omega} sin^2\,(m\omega x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/\omega} [1 - cos\,(2m\omega x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{sin\,(2m\omega x)}{2m\omega}\right]_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{\pi}{\omega}$$

حيث إن m عدد صحيح.

إذن ،
$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin(m\omega x)\sin(n\omega x)\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega} & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases}.$$

وبالمثل ،

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(m\omega x)\cos(n\omega x)\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega} & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases}$$

إذن ، $\sin(m\omega x)$ و $\cos(n\omega x)$ دوال متعـــــــــددة في الفـــــترة $0 \leq x \leq 2\pi/\omega$ حيث إن m و n عددان صحيحان.

الآن ، متسلسلة فوريه هي :

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + a_1\cos(\omega x) + a_2\cos(2\omega x) + a_3\cos(3\omega x) + \cdots$$
$$+ b_1\sin(\omega x) + b_2\sin(2\omega x) + b_3\sin(3\omega x) + \cdots$$

بضـــرب الطـــرفين بالــــدالة $\sin(m\omega x)$ والتكامــــــل علـــى الفـــترة $0 \leq x \leq 2\pi/\omega$ واستخدام التعامد الذي حصلنا عليه سابقاً نحصل على :

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\sin(m\omega x)\,dx = b_m \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(m\omega x)\,dx + 0 = \frac{\pi}{\omega} b_m$$

إذن ، $b_m = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\sin(m\omega x)\,dx$.

وبالمثل ، $a_m = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(m\omega x)\, dx$.

وللحصول على a_o لاحظ أن :

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\, dx = \frac{a_o}{2} \int_0^{2\pi/\omega} dx = \frac{a_o}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega} - 0\right) = \frac{\pi}{\omega} a_o$$

إذن ، $a_o = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x)\, dx$.

إن الفكرة الأهم في هذا التمرين هي مفهوم التعامد ، ولهذا المفهوم تفسيراً هندسياً بسيطاً للمتجهات حيث يكون المتجهان متعامدين إذا كانت الزاوية بينهما تساوي 90° ، ولكن لايوجد تفسير هندسي مقابل لتعامد الدوال. ومن الممكن إجراء مقارنة بين مفهوم التعامد في المتجهات ونظيره في الدوال جبرياً على النحو التالي :

يكون المتجهان e_i و e_j متعامدين إذا كان ضربهما القياسي يساوي صفراً. أي أن :

$$e_i \cdot e_j = 0 \quad \text{عندما} \quad i \neq$$

وبالمثل ، نقول إن الدالتين $g_i(x)$ و $g_j(x)$ متعامدتان إذا كان تكامل حاصل ضربهما على الفترة $\propto \leq x \leq \beta$ يساوي صفراً. أي أن :

$$\int_{\propto}^{\beta} g_i(x) g_j(x)\, dx = 0 \quad \text{عندما} \quad i \neq j$$

ويمكن تعميم ذلك بضرب $g_i(x) g_j(x)$ بدالة وزن $\omega(x)$ فتصبح الدالة المكاملة هي $g_i(x) g_j(x) \omega(x)$. وبهذا عندما تكون $(x) = 1$ فإننا نحصل على التعريف السابق.

إذا كان X متجهاً في فضاء متجهات بعده N فمن الممكن كتابة X كتركيب خطي لمتجهات أساس $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_N$. أي :

$$X = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_N e_N$$

وبالمثل ، يمكن كتابة أي دالة $f(x)$ كتركيب خطي لدوال أساسية $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \cdots$. أي :

$$f(x) = a_1 g_1(x) a_2 g_2(x) a_3 g_3(x), \cdots$$

لإيجاد المعامل a_j نقوم بإيجاد الضرب القياسي $e_j \cdot X$ في حالة المتجهات وضرب $f(x) g_i(x)$ (مع $\omega(x)$ إذا دعت الحاجة) وحساب التكامل على الفترة $\propto \leq x \leq \beta$ في حالة الدوال :

$$a_j = \int_{\propto}^{\beta} f(x) g_j(x)\, dx \Bigg/ \int_{\propto}^{\beta} \left[g_j(x)\right]^2 dx \quad \text{أو} \quad a_j = \frac{X \cdot e_j}{\left|e_j\right|^2}$$

وإذا كانت متجهات الأساس والدوال معيرة. أي أن :

$$\int [g_j(x)]^2 \, dx = 1 \quad \text{و} \quad |e_j|^2 = 1$$

فمن الممكن الاستغناء عن المقام.

مما سبق، يمكن اعتبار متسلسلة فورييه للدالة $f(x)$ كتركيب خطي لدوال أساسية متعامدة وهذه معالجة شائعة ومفيدة عند الدراسة النظرية لبعض الأنظمة وعلى الأخص في ميكانيكا الكم.

(١٥,٢) استخدم متسلسلة فورييه المقدمة في التمرين (١ ، ١٥) للحصول على متطابقة بارسفال

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 \, dx = \frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

الحل :

متسلسلة فورييه عندما $\omega = 1$ هي :

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots$$

$$+b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

بتربيع طرفي المتسلسلة والتكامل على الفترة $0 \le x \le 2$ واستخدام تعامد دوال الجيب وجيب التمام نحصل على :

$$\int_0^{2\pi} [f(x)]^2\, dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0^2}{4} + a_1^2 \cos^2 x + b_1^2 \sin^2 x + a_2^2 \cos^2 2x + b_2^2 \sin^2 2x + \cdots\right) dx$$

$$= \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \cdots)$$

وبهذا نرى أن:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [f(x)]^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

لاحظ أن الصيغة صحيحة على كل من الفترتين $-\pi \le x \le \pi$ و $0 \le x \le 2\pi$ لأن تعامد دوال الجيب وجيب التمام وكونهما دوريتين يؤديان إلى القيمة نفسها لتكامل $f(x)$ على أي دورة.

(١٥،٣) لنفرض أن الدالة $f(x)$ تمثل موجة مثلثية حيث إن:

$$f(x) = \begin{cases} x & ,0 < x < \pi \\ -x & ,-\pi < x < 0 \\ f(x + 2mx) & ,m \end{cases}$$

لكل عدد صحيح

أثبت أن متسلسلة فورييه هي:

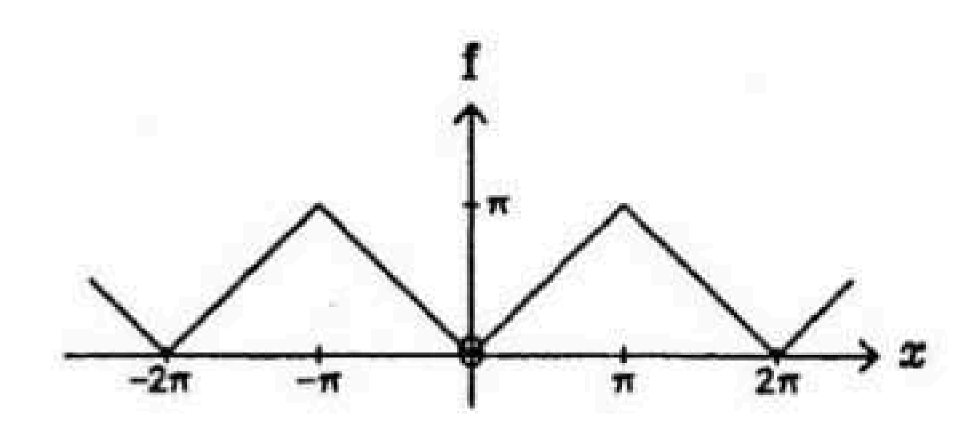
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)x]}{(2n+1)^2}$$

الحل:

بما أن الدورة $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$ نجد أن $\omega = 1$. ولذا فإن متسلسلة فورييه هي:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots$$

$$+b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$



حيث إن :
$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, cosmxdx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, cosmxdx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\frac{sinmx}{m}\right]_0^x - \frac{2}{\pi m}\int_0^{\pi} sinmx\, dx$$

$$= 0 - \frac{2}{\pi m}\left[\frac{-cosmx}{m}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2[cosmx - 1]}{\pi m^2}$$

$$= \begin{cases} 0 & , m \neq 0 \text{ عندما يكون } m \text{ زوجياً و } \\ \dfrac{-4}{\pi m^2} & , \text{ عندما يكون } m \text{ فردياً} \end{cases}$$

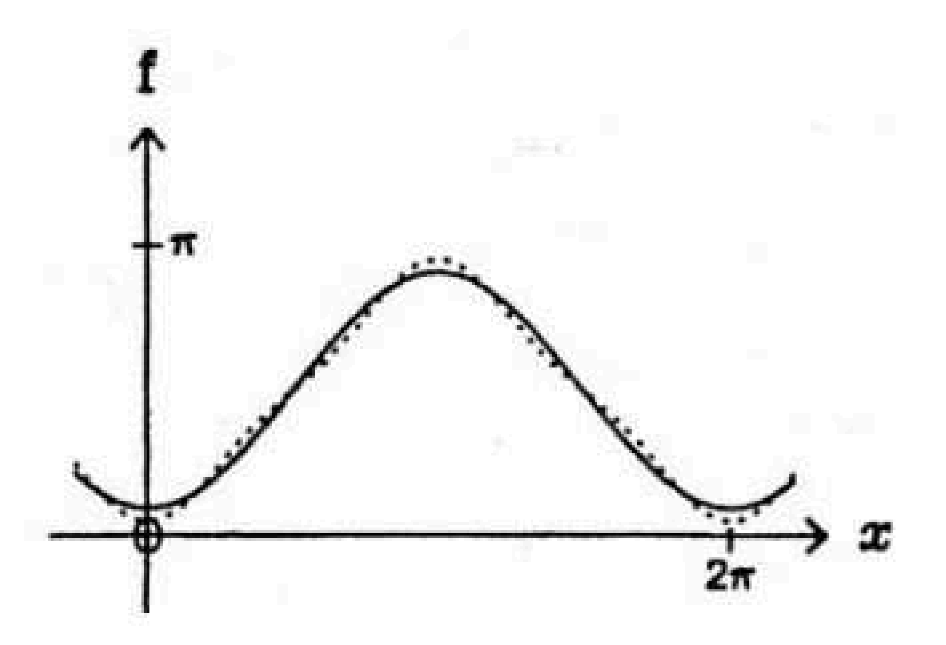
كما أن : $a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$.

وبالمثل،
$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx = 0$$

ونخلص إلى أن:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \cdots\right]$$

أي أن :
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos[(2n+1)x]}{(2n+1)^2}$$



(١٥,٤) جد صيغاً لشدة أنماط انحراف الضوء باستخدام

أ) شريحة يونغ المضاعفة بمسافة d.

ب) شريحة عريضة واحدة بعرض D.

الحل :

نمط الانحراف (أو الشدة) $I(q)$ تساوي مربع مقياس تحويل فورييه لدالة النّفاذ $A(x)$.

$$I(q) = |\Psi(q)|^2 = \Psi(q)^* \Psi(q)$$

حيث إن : $\Psi(q) = \Psi_o \int_{-\infty}^{\infty} A(x)\, e^{iqx} dx$.

أ) في حالة شريحة يونغ المضاعفة بمسافة d لدينا $A(x) = \delta(x + d/2) + \delta(x - d/2)$ حيث إن $\delta(x - x_o)$ هي مساحة شريحة رفيعة غير منتهية عند $x = x_o$ ، (وتساوي صفراً ما عدا ذلك). حينئذ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_o) f(x)\, dx = f(x_o)$$

وبهذا يكون:

$$\Psi(q) = \Psi_o \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x + d/2) + \delta(x - d/2)]\, e^{iqx} dx$$

$$= \Psi_o \left[e^{-iqd/2} + e^{+iqd/2}\right]$$

$$= 2\Psi_o \cos\,(q\, d/2)$$

إذن ،

$$I(q) = 4|\Psi_o|^2 \cos^2(q\, d/2) \propto 1 + \cos\,(qd) .$$

A(x) ←d→ x

I(q) 2π/d q

ب) للشريحة العريضة لدينا $A(x) = \begin{cases} 1, & |x| < D/2 \\ 0, & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$

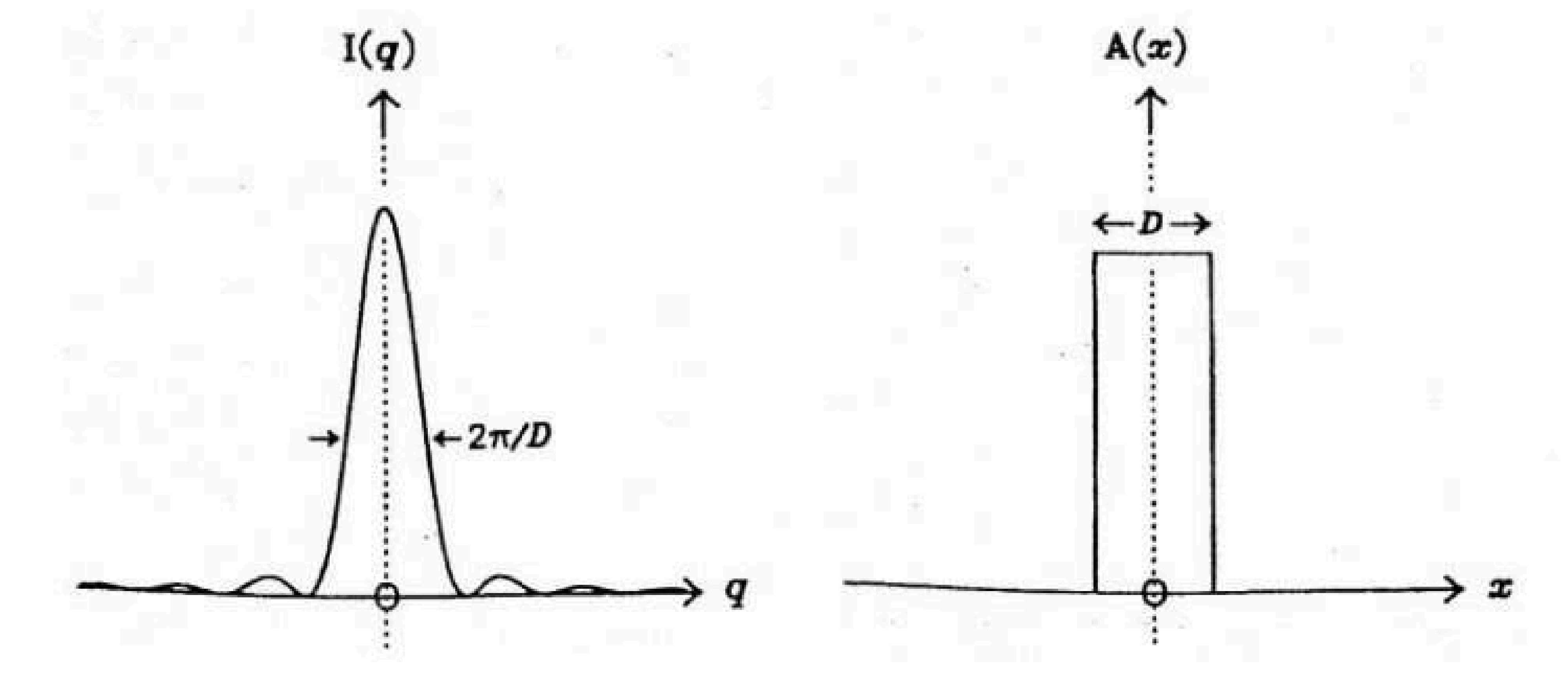
وبهذا نرى أن :

$$\Psi(q) = \Psi_o \int_{-D/2}^{D/2} e^{iqx} dx = \Psi_o \left[\frac{e^{iqx}}{iq}\right]_{-D/2}^{D/2}$$

$$= \Psi_o \frac{\left(e^{iqD/2} - e^{-iqD/2}\right)}{iq}$$

$$= \frac{2\Psi_o}{q} sin(qD/2)$$

إذن ، $.I(q) = \frac{4|\Psi_o|^2}{q^2} sin^2(qD/2) \propto \frac{1}{q^2}[1 - cos(qD)]$

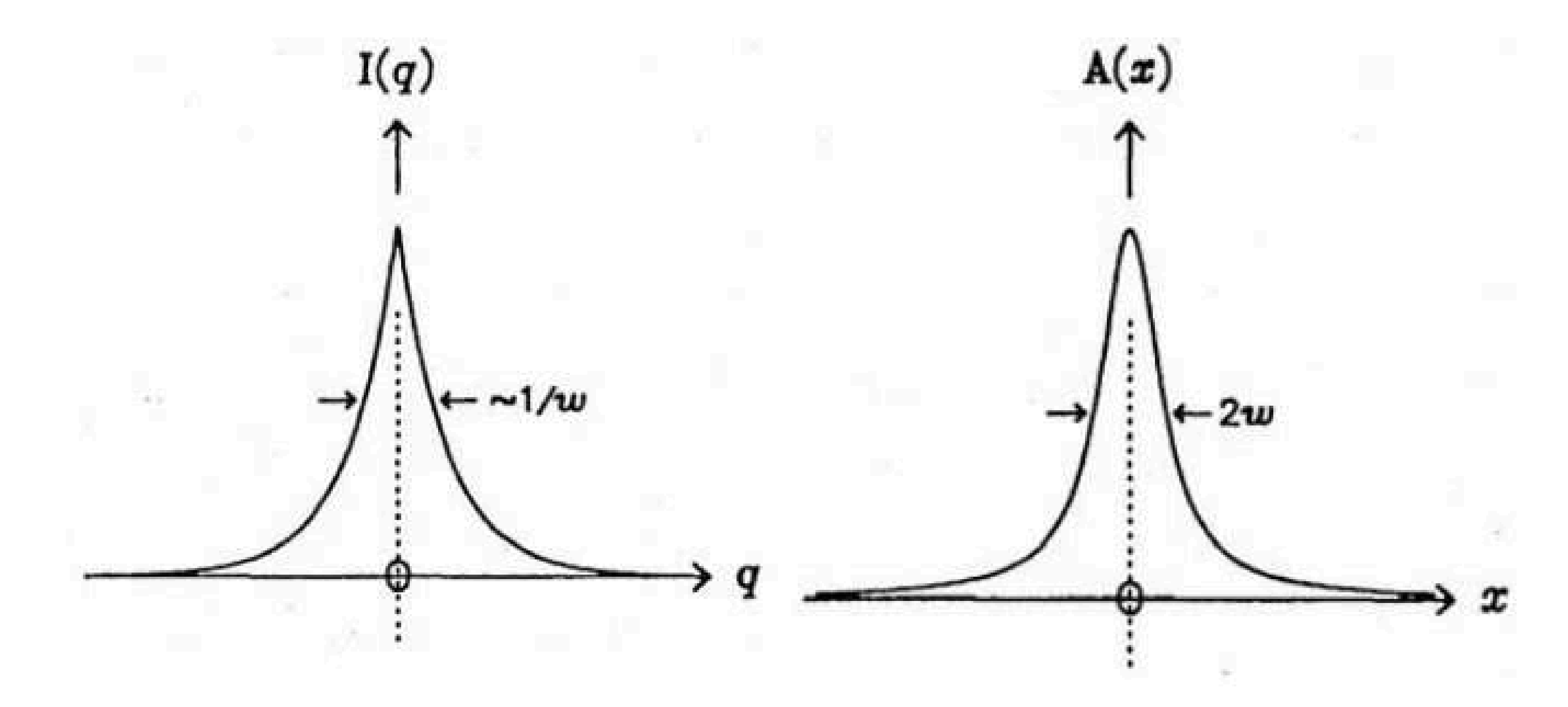


هناك بعض الدوال البسيطة الأخرى التي غالباً ما نحتاج إلى تحويل فورييه لها، منها :

١- دالة المشط ، أو شعاع غير منته من الرزات الحادّة بمسافة ثابتة d بين رأسين متجاورين. إن تحويل فورييه لهذه الدالة هو دالة مشط بمسافة بين رأسين متجاورين تساوي مقلوب المسافة d (أي $\frac{1}{d}$).

٢- دالة جاوس المقدمة في التمرين (٢، ١٤) وتأخذ الشكل $exp\ (-x^2/\sigma^2)$ وعرضها يتناسب مع σ. يحتاج إيجاد تحويل فورييه إلى رياضيات متقدمة وهو دالة جاوس بعرض $\frac{1}{\sigma}$.

٣- دالة لورينز وتأخذ الشكل $\frac{1}{x^2+w^2}$ وهي متماثلة وتأخذ قيمة عظمى عند $x = 0$ وجانبيها أعلى من جانبي دالة جاوس (انظر الشكل التالي).



عرض هذه الدالة يتناسب مع w. نحتاج رياضيات متقدمة لإيجاد تحويل فورييه لهذه الدالة أيضاً وهو دالة تحلل أُسية متماثلة (تشبه $e^{-|x|}$) بنصف حياة يتناسب مع $\frac{1}{\omega}$.

إذا كان بُعد الفضاء أكبر أو يساوي 2 فيفضل استخدام الإحداثيات القطبية لحساب تحويل فورييه وهذا يؤدي إلى استخدام دوال بيسل.

(١٥,٥) جد تحويل فورييه لدالة σ (أو رزة ضيقة لوحدة مساحة) عند : أ) نقطة الأصل $x = 0$ ب) $x = d$ ما هو وجه الخلاف بينهما ؟ وما الذي يمكن استنتاجه بقياس الشدّة فقط ؟

الحل :

أ)

$$\Psi(q) = \Psi_o \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, e^{iqx} dx = \Psi_o$$

ب)

$$\Psi(q) = \Psi_o \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-d)\, e^{iqx} dx = \Psi_o e^{iqd}$$

للحالتين السعة (المقياس) نفسها وتساوي $|\Psi_o|$ وأما الازاحة الزّاويّة فتختلف بمقدار qd. وفي حالة قياس الشدّة $|\Psi(q)|^2$ فقط فإن الحالتين تؤديان إلى أنماط انحراف متطابقة. ومن ذلك نستطيع الاستنتاج أن العناصر التي تؤثر على أنماط الانحراف تتكون من رزة واحدة معزولة دون أن يكون بمقدورنا تحديد موقعها.

نحذّر القارئ أنه على الرغم من استطاعتنا تفسير التأثيرات في غياب معلومات عن الإزاحة الزّاويّة لحالة بسيطة جداً ، إلاّ أن هذه مسألة مهمة في الحياة العملية.



ثبت المصطلحات

أولاً: عربي – إنجليزي

أ

استقرار	Stability
ابدالية	commutivity
اتجاه	direction
احتمال	probability
إحداثيات	coordinates
إحداثيات ديكارتية	Cartesian coordinates
إحداثيات قطبية	polar coordinates
إحداثيات قطبية كروية	spherical polar coordinates
إحصاء	statistics
إزاحة زاوية	argument
استقلال خطي	linear independence
إسقاط متجهات	projection of vectors

اشتقاق	differentiation
اشتقاق جزئي	partial differentiation
اشتقاق ضمني	implicit differentiation
اشتقاق لوغاريتمي	logarithmic differentiation
اشتقاق من المبادئ الأساسية	first principal differentiation
اضمحلال	degeneracy
الإحداثيات القطبية الأسطوانية	cylindrical polar coordinates
الإحداثي السيني	abscissa
التناسبية	proportionality
التواء	inflexion
الدوال الزائدية العكسية	inverse hyperbolic functions
الدوال المثلثية العكسية	inverse trigonometric function
الضرب المتجه	cross product
القيم العظمى والصغرى	maxima and minima
الكاينماتيكا (علم الحركة المجردة)	kinematics
انحراف	diffraction
إزاحة زاوية	phase
إكمال المربع	completing the square
أُسي	exponential
أثر مصفوفة	trace of a matrix
أعداد تخيلية	imaginary numbers

أعداد قياسية	scalars
أعداد مركبة	complex numbers
أمثلية مشروطة	constrained optimization

ت

تحليل	factorization
تحويل	transformation
تحويل التشابه	similarity transform
تحويل فورييه	Fourier transformation
تراكب	superposition
ترتيب التكامل	order of integration
ترميز بعدي	suffix notation
ترميز مصفوفي للمتجهات	matrix-vector notion
تطبيق (دالة)	mapping
تغيير المتغيرات	change of variables
تفاضلات تامة	exact differentials
تقارب	convergence
تقاطع	intercept
تقريبات زوايا صغيرة	small-angle approximations
تكامل	integration

تكامل ثلاثي	triple integral
تكامل خاص	particular integral
تكامل خطي	line integral
تكامل سطحي	surface integrals
تكاملات متعددة	multiple integrals
تكاملات محدودة	definite integrals
تكاملات مضاعفة	double integrals
تلاف	convolution
توازن	equilibria
توافقيات كروية	spherical harmonics

ث

ثابت التكامل	constant of integration

ج

جاذبية كامنة	gravitational potential
جاكوبي	Jacobian
جاوسي	Gaussian

جبر المتجهات	algebra of vectors
جبر المصفوفات	algebra of matrices
جبر خطي	linear algebra
جذور عدد	roots of a number
جذور معادلة	roots of an equation
جيوب	sines
جيوب التمام	cosines

ح

حجم	volume
حدود تكاملات	limits of integral
حركة توافقية بسيطة	simple harmonic motion
حساب	arithmetic
حساب مثلثات	trigonometry
حقل محافظ	conservative field
حل عام	general solution

خ

خارطة محيطية	contour map

خط مستقيم	straight line
خطية	linearity
خوارزمية نيوتن ورافسون	Newton-Raphson algorithm

د

دالة الخطأ	error function
دالة جاما	Gamma function
دالة جيبية	sine function
دالة حقيقية متماثلة	real symmetric function
دالة دلتا	delta-function
دالة ذاتية الارتباط	auto-correlation function
دالة زوجية	even function
دالة متممة	complimentary function
دالة مميزة	eignfunction
دائرة	circle
درجات	degrees
درجة كثيرة الحدود	degree of polynomial
دوال بسل	Bessel function
دوال تخالفية	anti-symmetric functions
دوال دورية	periodic function

دوال زائدية	hyperbolic function
دوال فردية	odd functions
دوال متعامدة	orthogonal functions
دوال متعددة المتغيرات	multi-valued functions
دوال متماثلة	symmetric functions
ديل تربيع	del-squared
ديناميكا الحرارة	thermodynamics

ذ

ذبذبة توافقية خامدة	damped harmonic oscillator
ذبذبة توافقية مشتقة	driven harmonic oscillator

ر

راديان	radian
رسومات	graphs

ز

زاوية	angle

زيادة	increment

س

سعة	amplitude

ش

شروط حدية (مقيدة)	boundary conditions
شكل تربيعي	quadratic form

ص

صيغ اختزال	reduction formulae
صيغ التحليل	factor formulae
صيغ ضعف الزاوية	double-angle formulae
صيغة وسيطية	parametric form

ض

ضرب ثلاثي قياسي	triple scalar product
ضرب قياسي	scalar product
ضوارب لاجرانج	Lagrange multipliers
ضوئيات (بصريات)	optics

ط

طاقة كامنة	potential energy

ظ

ظل	tangent

ع

عدد تخيلي أُسي	exponential imaginary number
عدد حقيقي	real numbers
عمودي	orthogonal
عوامل مصاحبة	co-factors

ف

فتحتا يونغ	Young's double slit
فصل المتغيرات	separation of variables

ق

قطع مكافئ	parabola
قاعدة التغطية	cover up rule
قاعدة الجيب	sine rule
قاعدة الضرب	product rule
قاعدة أوسبورن	Osborn's rule
قاعدة جيب التمام	cosine rule
قاعدة خارج القسمة	quotient rule
قاعدة لوبيتال	L'Hospital's rule
قسمة أعداد مركبة	division of complex numbers
قسمة متجهات	division of vectors
قسمة مصفوفات	division of matrices
قسمة مطولة	long division
قطع زائد	hyperbola
قطع ناقص	ellipse

قطوع مخروطية	conic section
قواعد السلسلة	chain rules
قوى	powers
قيم مميزة (ذاتية)	eignvalues
قيمة مطلقة (قياسية)	modulus

ك

كثيرة حدود	polynomial
كرة	sphere
كسور جزئية	partial fractions

م

مبرهنة بارسفال	Parseval's theorem
مبرهنة ديموفير	De Moivre's theorem
مبرهنة فيثاغورس	Pythagoras's theorem
مبرهنة لابينز	Leibnitz theorem
متتالية حسابية	arithmetic progression
متتالية هندسية	geometric progression
متجه الميل	slope vector

متجه عمودي (ناظمي)	normal vector
متجه مُعَّير	normalized vector
متجه وحدة	unit vector
متجهات	vectors
متجهات أساس	basis vector
متجهات متعامدة	orthogonal vectors
متجهات متوازية	parallel vectors
متجهات مميزة (ذاتية)	eignvectors
متسلسلة تايلور	Taylor series
متسلسلة فورييه	Fourier series
متسلسلة ماكلورين	Maclaurin's series
متطابقات	identities
متغير اعتباري	dummy variable
متوسط	average
متوسط	mean
مثلث باسكال	Pascal's triangle
محاور رئيسة	principle axis
محددات	determinants
مخطط أرجاند	Argand diagram
مرافق	conjugate
مساحة	area

مشتقة تامة	total derivative
مصاحب	adjoint
مصفوفات	matrices
مصفوفة حقيقية متماثلة	real symmetric matrix
مصفوفة دوران	rotation matrix
مصفوفة شاذة (ليس لها معكوس)	singular matrix
مصفوفة صف (صفية)	row matrix
مصفوفة عمود (عمودية)	column matrix
مصفوفة متعامدة	orthogonal matrix
مصفوفة قطرية	diagonal matrix
مصفوفة متماثلة	symmetric matrix
مصفوفة محايدة	identity matrix
مصفوفة مربعة	square matrix
مصفوفة ميل الميل	grad-grad matrix
مصفوفة هيرميتية	Hermitian matrix
مصفوفة وحدة	unit matrix
مضروب	factorial
معادلات آنية	simultaneous equations
معادلات تفاضلية	differential equations
معادلات تفاضلية جزئية	partial differential equations
معادلات تفاضلية عادية	ordinary differential equations

معادلات تفاضلية قابلة للفصل	separable differential equation
معادلات متجانسة	homogenous equations
معادلة الدرجة الثانية	quadratic equation
معادلة المستقيم المتجهة	vector equation of a line
معادلة انتشار	diffusion equation
معادلة برنولي	Bernoulli equation
معادلة بواسون	Poisson's equation
معادلة خطية	linear equation
معادلة غير متجانسة	inhomogeneous equation
معادلة قيم مميزة	eignvalue equation
معادلة لابلاس	Laplace's equation
معادلة مساعدة	auxiliary equation
معادلة مميزة	characteristic equation
معادلة موج	wave equation
معامل التكامل	integrating factor
معكوس	inverse
معكوس تحويل فورييه	inverse Fourier transform
معكوس مصفوفة	inverse matrix
معيار (طول)	magnitude
مفكوك ذو الحدين	binomial expansion
مقلوب متجهات	reciprocal vectors

منقول	transpose
منوال ناظمي	normal modes
مؤثر تفاضلي	differential operator
مؤثر لابلاس	Laplacian operator
مؤثرات	operators
ميكانيكا الكم	quantum mechanics
ميل	gradient
ميل	slope

ن

نصف حياة	half-life
نصف قطر التقارب	radius of conversion
نظام تذبذبي	oscillating system
نقاط حرجة	stationary points
نقطة الأصل	origin
نقطة انقلاب	turning point
نقطة سرجية	saddle point
نمو وانحلال أُسي	exponential decay and growth
نهاية	limit

ثانياً: إنجليزي – عربي

A

abscissa	الإحداثي السيني
adjoint	مصاحب
algebra of matrices	جبر المصفوفات
algebra of vectors	جبر المتجهات
amplitude	سعة
angle	زاوية
anti-symmetric functions	دوال تخالفية
area	مساحة
Argand diagram	مخطط أرجاند
argument	إزاحة زاوية
arithmetic	حساب
arithmetic progression	متتالية حسابية
auto-correlation function	دالة ذاتية الارتباط
auxiliary equation	معادلة مساعدة
average	متوسط

B

basis vector	متجهات أساس
Bernoulli equation	معادلة برنولي
Bessel function	دوال بسل
binomial expansion	مفكوك ذو الحدين
boundary conditions	شروط حدية (مقيدة

C

Cartesian coordinates	إحداثيات ديكارتية
chain rules	قواعد السلسلة
change of variables	تغيير المتغيرات
characteristic equation	معادلة مميزة
circle	دائرة
co-factors	عوامل مصاحبة
column matrix	مصفوفة عمود (عمودية)
commutivity	إبدالية
completing the square	إكمال المربع
complex numbers	أعداد مركبة
complimentary function	دالة متممة

conic section	قطوع مخروطية
conjugate	مرافق
conservative field	حقل محافظ
constant of integration	ثابت التكامل
constrained optimization	أمثلية مشروطة
contour map	خارطة محيطية
convergence	تقارب
convolution	تلاف
coordinates	إحداثيات
cosine rule	قاعدة جيب التمام
cosines	جيوب التمام
cover up rule	قاعدة التغطية
cross product	الضرب المتجه
cylindrical polar coordinates	الإحداثيات القطبية الأسطوانية

C

damped harmonic oscillator	ذبذبة توافقية خامدة
De Moivre's theorem	مبرهنة ديموفير
definite integrals	تكاملات محدودة
degeneracy	اضمحلال
degree of polynomial	درجة كثيرة الحدود

degrees	درجات
del-squared	ديل تربيع
delta-function	دالة دلتا
determinants	محددات
diagonal matrix	مصفوفة قطرية
differential equations	معادلات تفاضلية
differential operator	مؤثر تفاضلي
differentiation	اشتقاق
diffraction	انحراف
diffusion equation	معادلة انتشار
direction	اتجاه
division of complex numbers	قسمة أعداد مركبة
division of matrices	قسمة مصفوفات
division of vectors	قسمة متجهات
double integrals	تكاملات مضاعفة
double-angle formulae	صيغ ضعف الزاوية
driven harmonic oscillator	ذبذبة توافقية مشتقة
dummy variable	متغير اعتباري

E

eignfunction	دالة مميزة

معادلة قيم مميزة	eignvalue equation
قيم مميزة (ذاتية)	eignvalues
متجهات مميزة (ذاتية)	eignvectors
قطع ناقص	ellipse
توازن	equilibria
دالة الخطأ	error function
دالة زوجية	even function
تفاضلات تامة	exact differentials
أُسي	exponential
نمو وانحلال أُسي	exponential decay and growth
عدد تخيلي أُسي	exponential imaginary number

F

صيغ التحليل	factor formulae
مضروب	factorial
تحليل	factorization
اشتقاق من المبادئ الأساسية	first principle differentiation
متسلسلة فورييه	Fourier series
تحويل فورييه	Fourier transformation

G

Gamma function	دالة جاما
Gaussian	جاوسي
general solution	حل عام
geometric progression	متتالية هندسية
grad-grad matrix	مصفوفة ميل الميل
gradient	ميل
graphs	رسومات
gravitational potential	جاذبية كامنة

H

half-life	نصف حياة
Hermitian matrix	مصفوفة هيرميتية
homogenous equations	معادلات متجانسة
hyperbola	قطع زائد
hyperbolic function	دوال زائدية

I

identities	متطابقات

identity matrix	مصفوفة محايدة
imaginary numbers	أعداد تخيلية
implicit differentiation	اشتقاق ضمني
increment	زيادة
inflexion	التواء
inhomogeneous equation	معادلة غير متجانسة
integrating factor	معامل التكامل
integration	تكامل
intercept	تقاطع
inverse	معكوس
inverse Fourier transform	معكوس تحويل فورييه
inverse hyperbolic functions	الدوال الزائدية العكسية
inverse matrix	معكوس مصفوفة
inverse trigonometric function	الدوال المثلثية العكسية

J

Jacobian	جاكوبي

K

kinematics	الكاينماتيكا (علم الحركة المجردة)

L

Lagrange multipliers	ضوارب لاجرانج
Laplace's equation	معادلة لابلاس
Laplacian operator	مؤثر لابلاس
Leibnitz theorem	مبرهنة لابينز
L'Hospital's rule	قاعدة لوبيتال
limit	نهاية
limits of integral	حدود تكاملات
line integral	تكامل خطي
linear algebra	جبر خطي
linear equation	معادلة خطية
linear independence	استقلال خطي
linearity	خطية
logarithmic differentiation	اشتقاق لوغاريتمي
logarithms	لوغاريتمات
long division	قسمة مطولة

M

Maclaurin's series	متسلسلة ماكلورين
magnitude	معيار (طول)

تطبيق (دالة)	mapping
مصفوفات	matrices
ترميز مصفوفي للمتجهات	matrix-vector notion
القيم العظمى والصغرى	maxima and minima
متوسط	mean
قيمة مطلقة (قياسية)	modulus
تكاملات متعددة	multiple integrals
دوال متعددة المتغيرات	multi-valued functions

N

خوارزمية نيوتن ورافسون	Newton-Raphson algorithm
منوال ناظمي	normal modes
متجه عمودي (ناظمي)	normal vector
متجه مُعَّير	normalized vector

O

دوال فردية	odd functions
مؤثرات	operators
ضوئيات (بصريات)	optics
ترتيب التكامل	order of integration
معادلات تفاضلية عادية	ordinary differential equations
نقطة الأصل	origin

orthogonal	عمودي
orthogonal functions	دوال متعامدة
orthogonal matrix	مصفوفة متعامدة
orthogonal vectors	متجهات متعامدة
Osborn's rule	قاعدة أوسبورن
oscillating system	نظام تذبذبي

P

parabola	قطع مكافئ
parallel vectors	متجهات متوازية
parametric form	صيغة وسيطية
Parseval's theorem	مبرهنة بارسفال
partial differential equations	معادلات تفاضلية جزئية
partial differentiation	اشتقاق جزئي
partial fractions	كسور جزئية
particular integral	تكامل خاص
Pascal's triangle	مثلث باسكال
periodic function	دوال دورية
phase	إزاحة زاوية
Poisson's equation	معادلة بواسون
polar coordinates	إحداثيات قطبية

polynomial	كثيرة حدود
potential energy	طاقة كامنة
powers	قوى
principal axis	محاور رئيسة
probability	احتمال
product rule	قاعدة الضرب
projection of vectors	إسقاط متجهات
proportionality	التناسبية
Pythagoras's theorem	مبرهنة فيثاغورس

Q

quadratic equation	معادلة الدرجة الثانية
quadratic form	شكل تربيعي
quantum mechanics	ميكانيكا الكم
quotient rule	قاعدة خارج القسمة

R

radian	راديان
radius of conversion	نصف قطر التقارب
real numbers	عدد حقيقي
real symmetric function	دالة حقيقية متماثلة

real symmetric matrix	مصفوفة حقيقية متماثلة
reciprocal vectors	مقلوب متجهات
reduction formulae	صيغ اختزال
roots of a number	جذور عدد
roots of an equation	جذور معادلة
rotation matrix	مصفوفة دوران
row matrix	مصفوفة صف (صفية)

S

saddle point	نقطة سرجية
scalar product	ضرب قياسي
scalars	أعداد قياسية
separable differential equation	معادلات تفاضلية قابلة للفصل
separation of variables	فصل المتغيرات
similarity transform	تحويل التشابه
simple harmonic motion	حركة توافقية بسيطة
simultaneous equations	معادلات آنية
sine function	دالة الجيب
sine rule	قاعدة الجيب
sines	جيوب
singular matrix	مصفوفة شاذة (ليس لها معكوس)

slope	ميل
slope vector	متجه الميل
small-angle approximations	تقريبات زوايا صغيرة
sphere	كرة
spherical harmonics	توافقيات كروية
spherical polar coordinates	إحداثيات قطبية كروية
square matrix	مصفوفة مربعة
stationary points	نقاط حرجة
statistics	إحصاء
straight line	خط مستقيم
suffix notation	ترميز بعدي
superposition	تراكب
surface integrals	تكامل سطحي
symmetric functions	دوال متماثلة
symmetric matrix	مصفوفة متماثلة

T

tangent	ظل
Taylor series	متسلسلة تايلور
thermodynamics	ديناميكا الحرارة
total derivative	مشتقة تامة

trace of a matrix	أثر مصفوفة
transformation	تحويل
transpose	منقول
trigonometry	حساب مثلثات
triple integral	تكامل ثلاثي
triple scalar product	ضرب ثلاثي قياسي
turning point	نقطة انقلاب

U

unit matrix	مصفوفة وحدة
unit vector	متجه وحدة

V

vector equation of a line	معادلة المستقيم المتجهة
vectors	متجهات
volume	حجم

W

wave equation	معادلة موج



فتحتا يونغ	Young's double slit

كشاف الموضوعات

أ

إحداثيات قطبية ١٣٠، ١٣٤
إحداثيات قطبية أسطوانية ١٣٢
إحداثيات قطبية كروية ١٣٠
استقطار ١٠١
اشتقاق جزئي ١٠٧
اشتقاق عادي ٣١
اشتقاق من المبادئ الأساسية ٣١
إكمال المربع ١٤
الضرب الاتجاهي ٨٦، ٨٧
الضرب القياسي ٨٥، ٩٠
القيم والمتجهات المميزة ١٠١
أعداد مركبة ٦٧

ت

تحليل ٢٩، ١١٧
تحويل فورييه ١٧١
تذبذب توافقي بسيط ١٥١
تعيير ١٧٦
تفاضل تام ١٢٨
تقريبات بزاوية صغيرة ٦٥
تكامل ٤٧
تكامل بالأجزاء ٥٤
تكامل خطي ١٢٣
تكامل متعدد ١٢٩
تكاملات متعددة ١٢٩
تماثل ١٩، ١٣٥

ج

جذور عدد ٤

جذور معادلة ٤

ح

حجم الدوران ١٢٣

حساب مثلثات ٢٣

خ

خط مستقيم ٨٣

د

دالة أسية ١٦

دالة جاوس ١٨٢

دالة دلتا ١٥٢

دائرة ١٩

دوال زائدية ٧٥

دوال قياسية ٧٣

دوال متجه ٨٠، ٩٢

س

سلسلة فورييه ١٧٤

ص

صيغة التحليل ٢٩

ض

ضارب لاجرانج ١١٨

ضرب ثلاثي ٨٥، ٩٠

ضرب ثلاثي متجهي ٩١

ع

عدة متغيرات ١١٣

ق

قاعدة الجيب ٣٠، ٨٧

قاعدة جيب التمام ٣٠

قاعدة ضعف الزاوية ٢٤

قاعدة لوبيتال ٦٤

قطع زائد ٢٢
قطع مكافئ ١٤
قطع ناقص ١٩
قوى ١- ٣

ك

كرة ١٢٥، ١٣٢
كسور جزئية ٩، ١١

ل

لوغاريتمات ٢

م

مبرهنة ديموفوار ٧٤
متتالية حسابية ٧
متتالية هندسية ٧
متجه الميل ٨٠، ١١٠، ١٢١
متجهات ٧٩
متسلسلة تايلور ٥٩، ١٢٠
متسلسلة ماكلورين ٦٢
متعامدة ١٠٠، ١٠٦، ١٧٤
محددات ٩٧
مخطط أرجاند ٦٩
مربع ديل ١١١، ١٥٢
مستويات ٨٥- ٨٧
مصفوفات ٩٥
معادلات الدرجة الثانية ٤
معادلات آنية ٥
معادلات تفاضلية جزئية ١٥٩
معادلات تفاضلية عادية ١٢٨، ١٣٩
معادلة الانتشار ١٦١
معادلة الدرجة الثالثة ٦٥
معادلة الموج ١١٣
معادلة برنولي ١٤٥
معادلة شرودينفر ١٦٣
معادلة لابلاس ١٦٦
معامل التكامل ١٤٣
معيار ١٧٦
مفكوك ذو الحدين ٨٩
مقلوب متجهات ٩٢
مؤثر تفاضلي ٣٤، ١٥٥

ن

نصف الحياة ١٣٢
نقاط حرجة ٤٠، ١١٠
نمط انحلال ١٦٣- ١٦٥
نهايات ٦٣
نيوتن ورافسون ٦٥، ١١٩




تليجرام
مكتبة سور الأزبكية



www.ksu.edu.sa

ردمك : ٩٧٨-٩٩٦٠-٥٥-٨٨٠-٦
ISBN: 978-9960-55-880-6